様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月３１日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2010～2011
課題番号：２２８４００２８
研究課題名（和文）　リッチ流及びリッチソリトンの比較幾何

研究課題名（英文）　Comparison geometry of Ricci flow and Ricci solitons

研究代表者
横田 巧（YOKOTA TAKUMI）
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：７０５８３８５５

研究成果の概要（和文）：
本研究では主にリッチ流と曲率が下に有界なアレクサンドロフ空間の幾何学について調べ、代表者が以前に証明したリッチ流方程式の自己相似解である勾配型縮小リッチソリトンのガウス密度についてのギャップ定理を改良した。また、曲率が正定数以上の有限次元アレクサンンドロフ空間の filling radius は定曲率球面の値以下であり、等号成立は空間が定曲率球面に等長の場合に限るという比較・剛性定理を証明した。

研究成果の概要（英文）：
In this research, we mainly studied geometries of the Ricci fow and Alexandrov spaces of curvature bounded below, and we refined our gap theorem for gradient shrinking Ricci solitons, which are self-similar solutions to the Ricci flow equation. We also proved comparison and rigidity theorems stating that the filling radius of any finite-dimensional Alexandrov space with a positive lower curvature bound is at most that of the round sphere, and the equality holds if and only if it is isometric to the round sphere.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,250,000	375,000	1,625,000
2011 年度	1,150,000	345,000	1,495,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：リーマン幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：リッチ流、アレクサンドロフ空間、ワッサーシュタイン空間

１．研究開始当初の背景

(1)　リーマン多様体が与えられた時に、その リーマン計量を初期値とするリッチ流（Ricci flow）と呼ばれる放物型偏微分方程式を多様体上で解くことで変形し、その多様体の幾何を調べる手法は、R. Hamilton が 1982 年の論文で導入した後活発に研究され、2002ー03 年に発表された G. Perelman による３次元多様体の幾何化予想の証明に用い

られたことでも多くの研究者の注目を集めた。その後リッチ流は、Bhoem-Wilking と Brendle-Schoen による正曲率閉多様体に対する球面定理の証明にも用いられ、リーマン幾何学における強力な手法の一つとして認識されている。将来的には、4 次元微分同相版ポアンカレ予想や等法位曲率が正の閉多様体の分類等、4 次元以上の多様体の幾何に関する問題へのリッチ流の応用が期待されている。

また、代表者は特にリッチ流の幾何学的側面に興味をもって研究してきた。これまでにリッチ流の古代解（過去に無限時間存在するリッチ流方程式の解）に対するギャップ定理などを証明した。この定理はリッチ平坦計量をリッチ流の古代解の特別な場合と見なす事で、 M. Anderson の以前の結果の拡張とも見なせる。

(2)　曲率が下に有界なアレクサンドロフ空間は、その“断面曲率”の下限が有限個の点の間の距離に関する不等式により定義された距離空間の事で、例えば断面曲率が一様に下に有界なリーマン多様体の極限として現れる。アレクサンドロフ空間の理論は、リーマン多様体の幾何を調べる道具としても、その空間自体の幾何学的性質を調べるという立場からも活発に研究され、先の G. Perelman による幾何化予想の証明でも鍵となる。また無限次元非負曲率アレクサンドロフ空間は、最近のリッチ曲率が下に有界な測度距離空間の研究との関連においても興味を持たれている。例えば、多様体のリッチ曲率が非負である事と、その上のワッサーシュタイン空間においてエントロピー関数が凸関数である事が同値である事が知られている。非負曲率アレクサンドロフ空間上のワッサーシュタイン空間は無限次元非負曲率アレクサンドロフ空間の重要な具体例である。

代表者は特に有限次元とは限らないアレクサンドロフ空間の幾何学に興味を持ち研究しており、これまでに局所コンパクトとは限らないアレクサンドロフ空間で成り立つ様々な不等式の等号成立の場合を調べ、剛性定理を証明した。

２．研究の目的

(1)　リッチ流という多様体上のリーマン計量に対して定義される放物型偏微分方程式の解についての理解を深めることが本研究の目的の一つである。将来的には Perelman の 3 次元での結果を拡張するなどして、4 次元またはそれ以上の多様体の幾何に関する問題へのリッチ流の応用を考えたい。そこで本研究ではまず、一般次元のリッチ流の特異点やその拡大リスケーリング極限として現れる古代解やリッチソリトンの一般的性質、特にその幾何学的性質を明らかにすることを目的とする。また 3 次元リッチ流の挙動の更なる理解を目指す。

(2)　曲率が下に有界なアレクサドロフ空間の幾何学的性質をよりよく調べる。特に無限次元の場合に、有限次元で知られている結果がどこまで拡張できるのかを調べるなど、これまでの既存の研究とは異なる観点から研究を行なう。また、リーマン多様体の幾何学への更なる応用も考える。

３．研究の方法

(1)　リッチ流について、特にその幾何学的性質に着目し研究を行う。幾何解析でよく用いられる解析的手法だけでなく、Perelman がリッチ流という時空に対する比較幾何学的考察（L 幾何と呼ばれる）から導入した縮約体積などの幾何学的手法を用いる。特に閉多様体上のリッチ流の有限時間特異点や、リッチ流方程式の古代解及び縮小リッチソリトンの性質を調べ、これまでの代表者の研究を発展させる形でリッチ流及びリッチソリトンの比較幾何を展開する。またリッチ流の下でのエントロピーの単調性等についてのワッサーシュタイン幾何学的な考察も試みる。

(2)　有限次元とは限らない曲率が下に有界なアレクサンドロフ空間の幾何学的性質について調べる。特に代表者が以前に証明した剛性定理とその証明で用いた手法の応用を考える。

４．研究成果

本研究ではリッチソリトンと曲率が下に有界なアレクサンドロフ空間及びワッサーシュタイン空間の幾何学についての成果が得られた。以下に得られた成果を具体的に述べる。

(1)　勾配型縮小リッチソリトンに関する以前の結果を改良することができた。勾配型縮小リッチソリトンはリッチ流の自己相似解の一つであり、その重要な不変量としてガウス密度と呼ばれる不変量がある。得られた定理は「ガウス密度が 1 に十分近いような勾配型縮小リッチソリトンはユークリッド空間に限る」というギャップ定理である。これは以前にリッチ曲率が下に有界であるという仮定の下で代表者が得た定理の仮定を外し

たものであり、これにより J. Carrillo と L. Ni の予想に完全な解答を与えることが出来た。
以前の証明では G. Perelman の縮約体積の単調性を用いるためにリッチ曲率の仮定が必要であったが、勾配型縮小リッチソリトンから得られるリッチ流の古代解に対しては縮約体積の単調性がリッチ曲率の仮定無しで成り立つことを証明することで、この定理を改良することが出来た。今後はコンパクトな縮小リッチソリトンのガウス密度について、定曲率球面をモデルとする比較定理またはギャップ定理を証明できないかを考えたい。

(2) 曲率が正定数以上であるアレクサンドロフ空間の spread と呼ばれる不変量に関する定理を証明した。具体的には、「曲率が正定数以上の有限次元アレクサンドロフ空間の spread は正定曲率球面の場合、またその場合に限り最大となる」という比較・剛性定理を証明した。距離空間の spread は M. Gromov が導入した filling radius と呼ばれる閉多様体の不変量と関係があり、この定理の系として、「境界を持たない曲率が正定数以上の有限次元アレクサンドロフ空間の filling radius は正定曲率球面の場合、またその場合に限り最大となる」という比較・剛性定理が従う。これは F. Wilhelm が正曲率閉多様体に対して証明した定理をアレクサンドロフ空間に拡張したものである。
証明は多様体の場合の議論を参考にしたが、より一般的なアレクサンドロフ空間に対して考えることで、より簡単な証明が得られた。今後は曲率が正定数以上の無限次元アレクサンドロフ空間でも同様の比較・剛性定理が成立するかを考えたい。

(3) 高津飛鳥氏 (Max-Planck 研究所／名古屋大学) との共同研究で、可分ヒルベルト空間上のワッサーシュタイン空間の距離構造を調べた。距離空間が与えられた時、その上のワッサーシュタイン空間が、その距離空間上のボレル確率測度全体の空間にワッサーシュタイン距離と呼ばれる最適輸送問題に由来する距離を入れて得られる距離空間として定義される。この共同研究で得られた成果は「完備可分距離空間が他の距離空間上のユークリッド錐に等長である時、またその時に限り、その上のワッサーシュタイン空間も他の距離空間上のユークリッド錐に等長である」、「完備可分距離空間がヒルベルト空間と他の距離空間の直積に等長であるとき、その上のワッサーシュタイン空間も同じヒルベルト空間と他の距離空間の直積に等長である。また、距離空間が錐構造を持つかまたは各点において測地線が分岐しないならば、逆も成り立つ。」という２つの定理である。特に、可分ヒルベルト空間上のワッサーシュタイン空間は、同じ次元のワッサーシュタイン空間とユークリッド錐の直積に等長であることが分かる。
この共同研究自体は 2008 年に始まり、主結果もその時に得られていたが、最近の ヒルベルト空間上のワッサーシュタイン空間の錐構造に関する新しい考察を加えた後、論文①として受理された。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Asuka Takatsu and Takumi Yokota, Cone structure of L^2－Wasserstein spaces, Journal of Topology and Analysis 査読有 受理

② Takumi Yokota. On the filling radius of positively curved Alexandrov spaces, Mathematische Zeitschrift, 査読有 印刷中 DOI: 10.1007/s00209-012-0999-7

〔学会発表〕（計９件）

① 横田巧, 正曲率 Alexandrov 空間の fillimg radius について, 2012 日本数学会年会, 2012 年 3 月 28 日 東京理科大学

② 横田巧, On the filling radius of positively curved Alexandrov spaces, 研究集会 "Group actions and K-theory", 2012 年 3 月 14 日 京都大学

③ 横田巧, 正曲率 Alexandrov 空間の fillimg radius について, 微分トポロジーセミナー, 2011 年 12 月 20 日 京都大学

④ 横田巧, A refinement of a gap theorem for gradient shrinking Ricci solitons, 松江微分幾何学研究会 2011, 2011 年 12 月 17 日 島根大学

⑤ 横田巧, 正曲率 Alexandrov 空間の fillimg radius について, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 2011 年 11 月 1 日 筑波大学

⑥ 横田巧, 正曲率 Alexandrov 空間の fillimg radius について, 幾何学セミナー, 2011 年 10 月 21 日 九州大学

⑦　横田巧，正曲率条件をみたす多様体上のリッチ流，ワークショップ「リーマン計量の変分問題」，2010 年 10 月 28ー29 日 東北大学

⑧　横田巧，リッチ流と第 2 種曲率作用素が正の多様体，第 57 回幾何学シンポジウム，2010 年 8 月 9 日 神戸大学

⑨　横田巧，リッチ流の古代解の比較幾何，談話会，2010 年 4 月 28 日 京都大学

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~takumiy/

６．研究組織
(1)研究代表者
横田 巧（YOKOTA TAKUMI）
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：７０５８３８５５