

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：12401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800002

研究課題名(和文)ネフな接束をもつファノ多様体の構造研究

研究課題名(英文)Structural Studies of Fano manifolds with nef tangent bundle

研究代表者

渡辺 究 (WATANABE, Kiwamu)

埼玉大学・理工学研究科・助教

研究者番号：20638176

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：接束の観点から等質多様体の特徴付けに関する研究を行った。とりわけ、ネフ接束をもつファノ多様体に関するCampana-Peternell予想(CP予想)とVMRTによる等質多様体の特徴付けを与えるMok-Hong-Hwang予想(MHH予想)に関する研究を行った。R. Munoz, G. Occhetta, L. E. Sola Conde, J. A. Wisniewskiの研究など、CP予想に関しては単著も含め5本の論文を執筆し、出版ないし出版が決定した。また、MHH予想に関してはG. Occhetta, L. E. Sola Condeと研究を行いこちらも出版が決まっている。

研究成果の概要(英文)：I studied characterization problems of homogeneous varieties from the viewpoint of tangent bundle. In particular, I studied the Campana-Peternell conjecture on Fano manifolds with nef tangent bundle (which is the so-called the CP conjecture) and the Mok-Hong-Hwang conjecture on characterizations of homogeneous varieties by these VMRT's (MHH conjecture). I studied these problems with R. Munoz, G. Occhetta, L. E. Sola Conde and J. A. Wisniewski. Seven papers have been published or accepted for publications.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ファノ多様体 等質多様体 有理曲線 VMRT 接束

1. 研究開始当初の背景 森重文は 1979 年にハーツホーン予想を解決した:「豊富な接束をもつ非特異射影多様体は射影空間である」。この結果を出発点として、森による端射線の理論が構築され、川又雄二郎, V. V. Shokurov, M. Ried 等の貢献により特異点を持つ場合も含めた極小モデル理論の基礎が完成した。また、ハーツホーン予想は複素微分幾何におけるフランクель予想(1980年に Siu と Yau により解決)の一般化としても知られている:「正則双断面曲率が正のコンパクトケーラー多様体は射影空間である」。さらに、Siu と Yau は正則双断面曲率が非負のコンパクトケーラー多様体に関する一般化フランクель予想を提起した。この予想は 1988 年に N. Mok により解決された。本研究では上記結果の一般化にあたる以下の CP 予想に関する研究を行った:

**予想** ネフ接束をもつファノ多様体(以下、CP 多様体)は有理等質多様体である。

ネフ接束をもつ射影多様体は、エタール被覆の差を除いて、トラス上の滑らかなファイバー空間として記述可能であり、そのファイバーとして CP 多様体が現れる。従って、CP 予想の解決は、ネフ接束をもつ多様体の構造定理を与えることに他ならない。

2. 研究の目的 本研究の目的は上記 CP 予想をファノ多様体上の有理曲線の幾何学を用いることにより研究し、接束のネフ性からどのように群の作用が復元されるかを明らかにすることである。

3. 研究の方法 一般にファノ多様体は有理曲線で覆われることが知られている。また、有理等質多様体は半単純線形代数群  $G$  の商  $G/P$  として記述される。半単純代数群  $G$  のリー環は  $\mathfrak{sl}(2)$  の組み合わせから構成されるが、そのことは有理等質多様体の幾何学がその上の直線(特に有理曲線)により決定されることを意味する。従って、ネフ接束をもつファノ多様体に関しても、その上の有理曲線に着目して研究を行うことは自然である。とりわけ、有理曲線の変形理論や VMRT の理論(Varieties of Minimal Rational Tangents の理論)を用いて研究を行った。

4. 研究成果 研究計画に従って、CP 予想の研究を行った。全ての基本収縮射が非特異  $P^1$  ファイブレーションであるファノ多様体は完全旗多様体  $G/B$  ( $G$  は半単純代数群、 $B$  はそのボレル部分群)と同型であることを本研究課題採択以前に示し、その内容を本研究課題の初年度に論文にまとめた。この結果は G. Occhetta, L. E. Sola Conde, J. Wisniewski との共同研究であり、"Fano manifolds whose elementary contractions are smooth  $P^1$ -fibrations: a geometric characterization of flag varieties" に論文としてまとめ、Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. から出版されることが決定し

た。さらに、CP 予想に関して上記 3 氏と R. Munoz と共にサーベイ論文 "A survey on the Campana-Peternell Conjecture" を書き *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* から出版された。サーベイ論文で扱った内容を一部一般化し、強い uniformity を満たす極小有理曲線族をもつファノ多様体は 4 種類の等質多様体しかないことを示した。これは G. Occhetta, L. E. Sola Conde との共同研究であり、論文 "Uniform families of minimal rational curves on Fano manifolds" にまとめ、Rev. Mat. Complut. から出版された。さらに単著として、基礎体が正標数の場合に CP 予想の類似問題を考えた。その結果を論文 "Low-dimensional projective manifolds with nef tangent bundles in positive characteristic" にまとめ、Comm. Algebra から出版された。また、ピカル数が大きい CP 多様体を考察し、"Fano manifolds with nef tangent bundles and large Picard numbers" に論文としてまとめ、Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. から出版された。また、CP 予想に関連し、VMRT の観点からシンプレクティックグラスマン多様体の特徴付けを与えた。この結果は G. Occhetta, L. E. Sola Conde との共同研究であり、論文 "A characterization of symplectic Grassmannians" にまとめ、Math. Z から出版されることが決定している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)以下、全て査読あり。

Occhetta, Gianluca; Sola Conde, Luis

E.; Watanabe, Kiwamu, *A characterization of symplectic Grassmannians*.

arXiv:1604.06867, to appear in *Math. Z.*

DOI: 10.1007/s00209-016-1807-6

Occhetta, Gianluca; Sola Conde, Luis

E.; Watanabe, Kiwamu; Wisniewski,

Jaroslav A., *Fano manifolds whose elementary contractions are smooth*

*$P^1$ -fibrations: a geometric characterization of flag varieties*, to appear in *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*

DOI: 10.2422/2036-2145.201508\_007

Watanabe, Kiwamu, *Low-dimensional*

*projective manifolds with nef tangent*

*bundles in positive characteristic*. Volume

45, (2017) Issue 9, 3768-3777, *Comm.*

*Algebra.*

<http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2016.1245740>

Occhetta, Gianluca; Sola Conde, Luis E.; Watanabe, Kiwamu, *Uniform families of minimal rational curves on Fano manifolds*. 29 (2016), no. 2, 423-437, *Rev. Mat. Complut.*  
DOI: 10.1007/s13163-015-0183-9

Munoz, Roberto; Occhetta, Gianluca; Sola Conde, Luis E.; Watanabe, Kiwamu; Wisniewski, Jaroslaw A., A survey on the Campana-Peternell Conjecture, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* Volume 47 (2015), 127-185.  
DOI: 10.13137/0049-4704/11223

Watanabe, Kiwamu, Fano manifolds with nef tangent bundle and large Picard number. 91 (2015), no. 6, 89-94.  
DOI: 10.3792/pjaa.91.89

Munoz, Roberto; Occhetta, Gianluca; Sola Conde, Luis E.; Watanabe, Kiwamu, Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle. *Math. Ann.* 361 (2015), no. 3-4, 583-609.  
DOI: 10.1007/s00208-014-1083-x

[学会発表](計 18 件)

渡邊究, Characterizations of rational homogeneous manifolds, Workshop on Fano varieties and Calami-Yau varieties, 神戸大学六甲台第2キャンパス(兵庫県神戸市), 2017年1月25日.

渡邊究, 等質多様体の特徴付け, 談話会, 佐賀大学本庄キャンパス(佐賀県佐賀市), 2016年11月29日.

渡邊究, Fano manifolds with nef tangent bundle, 都の西北代数幾何学シンポジウム, 早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都新宿区), 2016年11月18日.

渡邊究, A characterization of symplectic Grassmannians, 代数曲面ワークショップ, 首都大東京秋葉原サテライトキャンパス(東京都千代田区), 2016年11月12日.

渡邊究, Fano manifolds with nef tangent bundle, International Conference on Spherical Varieties, Yau Mathematical Sciences Center (Sanya China), 2016年11月8日.

渡邊究, A characterization of symplectic Grassmannians, 日本数学会秋季総合分科会, 関西大学千里山キャンパス(大阪府吹田市), 2016年9月19日.

渡邊究, A characterization of symplectic Grassmannians, 代数幾何学セミナー, 九州大学伊都キャンパス(福岡県福岡市), 2016年6月9日.

渡邊究, A characterization of Symplectic Grassmannians, 東大数理代数幾何セミナー, 東京大学駒場キャンパス(東京都目黒区), 2016年5月31日.

渡邊究, Fano manifolds with nef tangent bundles, 第14回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府大阪市), 2016年3月6日.

渡邊究, 等質多様体の紹介と完全旗多様体の特徴付け, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都新宿区), 2015年10月9日.

渡邊究, Uniform families of minimal rational curves on Fano manifolds, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府京都市), 2015年9月15日.

渡邊究, Uniform families of minimal rational curves on Fano manifolds, 第3回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 北海道教育大札幌駅前サテライト(北海道札幌市), 2015年8月17日.

渡邊究, Fano manifolds with nef tangent bundle and large Picard number, 日本数

学会年会，明治大学駿河台キャンパス（東京都千代田区），2015年3月21日。

渡邊究，Fano manifolds with nef tangent bundles，Mini-conference on Algebraic Geometry，National Taiwan University (Taipei Taiwan)，2015年3月6日。

渡邊究，Fano manifolds with nef tangent bundles，代数幾何学セミナー，京都大学北部キャンパス（京都府京都市），2015年2月6日。

渡邊究，Contact structure, dual varieties and Fano manifolds with nef and big tangent bundle, 研究集会「代数多様体とその周辺」，琉球大学（沖縄県中頭郡），2014年10月2日。

渡邊究，完全旗多様体の特徴付けとCampana-Peternell予想，談話会，東京理科大学野田キャンパス（千葉県野田市），2014年5月23日。

渡邊究，Characterization of complete flag manifolds, 特異点月曜セミナー，日本大学分理学部キャンパス（東京都世田谷区），2014年4月21日。

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Kiwamu.Watanabe.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡邊 究 (WATANABE, Kiwamu)  
埼玉大学・理工学研究科・助教  
研究者番号：20638176

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：

(4) 研究協力者

Roberto Muñoz  
Universidad Rey Juan Carlos

Gianluca Occhetta  
Università di Trento

Luis E. Solá Conde  
Università di Trento

Jaroslaw A. Wiśniewski  
Uniwersytet Warszawski