

平成 21 年 5 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (A)
 研究期間：2005 ～ 2008
 課題番号：17204011
 研究課題名 (和文) 統計力学に動機付けをもつ諸問題の確率解析による総合的かつ統合的研究
 研究課題名 (英文) Comprehensive and integrated research of problems motivated by statistical mechanics with stochastic analysis
 研究代表者
 長田 博文 (おさだ ひろふみ)
 九州大学・大学院数理学研究院・教授
 研究者番号：20177207

研究成果の概要：統計力学は、膨大な自由度-数学的には無限自由度-をもつ系を研究対象とする。この研究では、統計力学に動機づけられた諸問題を、とくに無限次元確率力学系を中心として、確率解析の手法で統一的に研究し、確率場、相互作用粒子系、極限定理に関係する様々な結果を得た。さらに、これらの研究を契機として、Bessel 確率積分やフラクタル構造領域の劣ガウス型熱核の評価など、確率解析の理論を発展させた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
17年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
18年度	5,200,000	1,560,000	6,760,000
19年度	5,200,000	1,560,000	6,760,000
20年度	5,200,000	1,560,000	6,760,000
年度			
総計	20,700,000	6,210,000	26,910,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率論 解析学 統計力学 無限粒子系 確率解析 確率場 確率力学系

1. 研究開始当初の背景

本研究の研究分担者・連携研究者の研究開始時における状況は以下の通りである。

確率場に関する研究者：

原と樋口は今までパーコレーションやギブズ測度の臨界現象についていくつかの重要な業績を上げてきた。原はパーコレーションの連続極限について、極限のスーパーブラウン運動との関係を明らかにした。篠田はカーペットに付随するグラフのパーコレーションについて臨界指数が1より真に小さくなることを証明した。杉浦はパス空間の

Gibbs 測度について、混合性を調べた。

相互作用粒子系に関する研究者：

種村はランダム行列に関する相互作用粒子系について、いくつかの明示的な計算・表現をえた。長田は Fermion 測度に関する確率力学系の一般的な構成を、初歩的なレベルで行った。また、干渉ブラウン運動の構成を、Dirichlet 空間論を用いることで一般に行った。松本は、ブラウン運動の関数の、様々な精密な計算を行った。

極限定理に関する研究者：

舟木、内山、籠屋、永幡は、いくつかの興

味深いモデルについて、流体力学極限を証明した。長田は、マルコフ過程の均質化について、Dirichlet形式を用いて、極めて一般的な定理を確立した。干渉ブラウン運動とよばれる典型的な無限次元確率力学系にたいする、tagged particle problem について極限係数の正值性をパーコレーションの結果をもとに示した。梁は、大偏差原理の精密評価を行ってきた。

確率解析に関する研究者：

熊谷と長田はフラクタル上の拡散過程の研究をしてきた。長田はSpohnとの共同研究でパス空間の相互作用をもつ無限体積Gibbs測度の構成を行い、さらにそれを定常分布にする確率力学系のひとつを構成した。三苫はパス空間の拡散過程と数理物理との結びつきを研究してきた。乙部はパス空間に値を取る確率微分方程式の研究を行ってきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、統計力学に動機づけられた諸問題、特に、無限粒子系の確率力学系を、確率解析の視点から、総合的かつ統一的に研究することである。

3. 研究の方法

研究組織を効率よく運営するために、分担者を分割し、4班を構成する。横断的かつ広範な研究を遂行するために、何人かの分担者は複数の班に所属する。研究代表者の長田も、いくつかの班に属する。同時に全体を監督・総括する役割を負う。各般に研究リーダーを定め、効率よく運営する。研究代表者は各班のリーダーと常日頃連絡を取り、研究の進展状況を把握する。各班の分担者は、それぞれに、または必要に応じて共同で研究する。そのために各班が独自で、あるいは必要に応じて合同で研究集会を開催する。数名の分担者は、国際研究集会に参加し、国内で得られた研究成果の発表を行い、また、海外における最新の研究動向の把握に努める。

研究期間の後半には、国内外から関係する研究者を多数招聘し、大規模な国際研究集会を開催し、研究成果の発表と、また新たなる知見の収集に努める。また、ドイツの研究グループと研究交流を図る。

研究の統括は、長田が行う。班の構成は、以下の通りである。

1) 確率場 (Gibbs 測度、Fermion 測度、パーコレーション)

構成員：原・白井・樋口・杉浦・篠田・種村・熊谷

2) 相互作用粒子系 (ランダム行列、ディレクティッドポリマー、量子ランダムウォーク)

構成員：種村・吉田・長田・今野・松本・半田

3) 極限定理：(流体力学極限、不変原理、均質化)

構成員：舟木・内山・長田・籠屋・永幡・梁

4) 確率解析 (確率偏微分方程式・Dirichlet空間・無限次元拡散過程)

構成員：熊谷・長田・乙部・三苫・深井・舟木

4. 研究成果

各テーマ毎に述べる。

確率場グループ：

樋口は、シエルピンスキーカーペットのパーコレーションの臨界確率について、従来の熊谷の結果を進展させた。白井は、Fermion 測度のなかでも、Ginibre 確率点場という2次元空間に於いては、最も多くの不変性を持つ一番重要な確率点場に対して、その線形統計量に関する興味深い漸近挙動を得た。この結果は長田がGinibre 確率点場を定常状態とする、確率力学系(無限次元拡散過程)を構成する上で、重要な役割を果たした。熊谷は、パーコレーションクラスターを典型例とするランダムな図形上の、熱伝導の仕方を解析した。具体的には、正則な樹木上のパーコレーション、分枝過程、6次元より大きい次元の散開方向付きパーコレーションについて、臨界確率における(長さが無限になるように条件付けた)クラスター上のランダムウォークが(媒質について確率1のレベルで)劣拡散的であることを示し、そのスペクトル次元を求めた。原は、レース展開を駆使して、臨界点における2点関数の振る舞いを詳しく調べた。

相互作用粒子系グループ：

種村が有限粒子系の段階ではあるが、

Airy 点過程に関する確率微分方程式の解の明快な表現を得た。さらに、種村はAiry 点過程やBessel 点過程に関する確率力学系を時空間相関関数の手法を用いて解析した。今野は、離散時間の最近接1次元量子ウォークの極限定理を、そのダイナミクスを決めるユニタリ行列の代数的な関係を援用し、経路積分のアプローチにより求めた。さらに、今野は、多状態 epidemic

過程の安定状態を解析した。さらに、tree 上の連続時間量子ウォークの中心極限定理を証明し、新しい形の極限分布を得た。長田は Ginibre 確率点場を定常分布に持つ、確率力学系の構成を行った。

極限定理グループ：

ランダムウォークにピンニングの効果（原点へのジャンプ）を加えて得られるマルコフ連鎖に対して、見本路大偏差原理を示すことができるが、さらに、もし、その速度汎関数の最小点が一意ならば、スケール変換されたマルコフ連鎖に対して大数の法則が成立し、一意的な最小点が極限になることが知られている。しかし、最小点が2個以上ある場合には、極限の特定は非自明である。舟木は、そのような場合を考察し確率評価の精密化を行うことによりスケール極限として現れる最小点を決定した。この極限は、次元およびマルコフ連鎖の最終時刻での状態により異なることが示された。場合によっては2つの最小点が共存すること、すなわち極限においてともに正の確率で生き残ることがあり得ることが示された。永幡は、格子気体のアインシュタイン関係について成果を得た。

確率解析グループ：

熊谷が、強い再帰性を持つグラフ上のマルコフ連鎖について、劣ガウス型評価を持つ条件を有効抵抗の言葉で与えた。さらに、樹木グラフの上のパーコレーションに関して、その臨界集合上の熱核を研究し、Barlow氏とともに、熱核の臨界集合におけるフラクタル的様相を明快に示す非常に興味深い結果を得た。さらに、熊谷は、対称な飛躍型確率過程の Ly' evy 測度が density を持ち、これが球対称な関数と比較可能な時、ハルナック不等式や、熱核の精密な上下評価を得た。また、対称マルコフ連鎖の列の tightness を極めて一般の範疇で論じ、スケール極限が存在する十分条件を与えた。長田は、典型的な無限次元確率力学系である干渉ブラウン運動に対して、Dirichlet 形式の理論によって構成されたこの確率力学系を、確率微分方程式による表現を得るための一般的な構成手段を得ることに成功した。舟木はパス空間のある確率力学系（これはパス空間の反射壁ブラウン運動と言うべきものであるが）の構成に動機づけられて、Bessel 過程に対する Wiener 積分を構成しその性質を調べた。Bessel 過程やその冪、あるいは局所時間などに関する Wiener 型確率積分について Brascamp-Lieb 不等式、Hardy の L^2 不等式などを用いて論じた。さらに、半直線上の熱方程式に適当なノイズを付け加えて得られる確率偏微分方程式が Ly' evy 過程のパス空間上の分布

を不変測度に持つことを示した。また、FKG 不等式および Brascamp-Lieb 不等式は、統計力学あるいは場の量子論において基本的道具として用いられるが、これらの不等式について、確率微分方程式の比較定理・エルゴード定理に基づく証明を与えた。特に、Brascamp-Lieb 不等式について、非 Gauss 測度との比較あるいは非凸ポテンシャルの扱いを可能にした。三苫が、Chern-Simons 汎関数積分の1ループ近似をウィナー空間の枠組みで数学的に定義し、レベルパラメータに対する漸近展開定理を得、更に、3次元球面の場合に量子不変量を展開係数から求めた。

2007年には、「Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems」という国際研究集会を福岡で共同主催した。この研究集会には、Ben Arous（クーラン研究所）、Bolthausen（チューリッヒ工科大学）、Forrester（メルボルン大学）をはじめ、14名の研究者を海外から招聘した。

2008年には、日独共同研究の一環として、福岡において、「Stochastic Analysis and Applications」が開催されたが、それに協力し、ドイツの研究グループとの交流を深めた。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計20件）

- ① H. Osada and T. Shirai, Variance of the linear statistics of the Ginibre random point field, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有り、B6、2008、193-200
- ② T. Hara, Decay of correlations in nearest-neighbor self-avoiding walk, percolation, lattice trees and animals. Ann. Probab. 査読有り、36 (2008), no. 2, 530--593.
- ③ T. Funaki, A scaling limit for weakly pinned Gaussian random walks, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有り、B6、2008、97-109
- ④ T. Kumagai, J. Misumi, Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media, J. Theoret. Probab., 査読有り、4, 2008、910-935
- ⑤ Z.-Q. Chen and T. Kumagai, Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces, Probab. Theory Relat. Fields, 査読有り、140、2008、277-317
- ⑥ M. T. Barlow, A. A. J'arai, T. Kumagai and G. Slade, Random walk on the incipient infinite cluster for

- oriented percolation in high dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 査読有り、278 (2008), 385--431.
- ⑦ T. Funaki, et al., Wiener integrals for centered powers of Bessel processes, *II, ALEA Lat. Am. J. Probab. Mat. Stat.*, 査読有り、1、2008、225-240.
- ⑧ I. Mitoma, S. Nishikawa, Asymptotic expansion of the one-loop approximation of the Chern-Simons integral in an abstract Wiener space setting. *J. Funct. Anal.* 253, no. 2, 査読有り、(2007) 729-771.
- ⑨ Y. Nagahata, Regularity of the diffusion coefficient matrix for lattice gas reversible under Gibbs measures with mixing condition、*Communications in Mathematical Physics*, 査読有り、273、2007、637-650.
- ⑩ M. Katori and H. Tanemura, Infinite Systems of Non-Colliding Generalized Meanders and Riemann-Liouville Differintegrals、*Probab. Theory Relat. Fields*, 査読有り、138、2007、113-156
- ⑪ N. Masuda, N. Konno, Multi-state epidemic processes on complex networks、*J. Theoret. Biol.*, 査読有り、243-1、2006、64-75
- ⑫ N. Konno, Continuous-time quantum walks on trees in quantum probability theory、*Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top.*, 査読有り、9-2、2006、287-297
- ⑬ J. Hu, T. Kumagai, Nash-type inequalities and heat kernels for non-local Dirichlet forms、*Kyushu J. Math.*, 査読有り、60、2006、245-265
- ⑭ M. Barlow, T. Kumagai, Random walk on the incipient infinite cluster on trees、*Illinois J. Math.*, 査読有り、50、1-4、2006、33-65
- ⑮ T. Kumagai, M. Hino, A trace theorem for Dirichlet forms on fractals、*J. Func. Anal.*, 査読有り、238-2、2006、578-611
- ⑯ Y. Otake, Stochastic partial differential equations with two reflecting walls. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 査読有り、13 (2006), no. 2, 129--144.
- ⑰ T. Funaki, et al., Stochastic Interface Models. In: *Lectures on Probability Theory and Statistics and Statistics*, Springer Lect. Notes Math., 58-12, 2005, 103-274
- ⑱ M. Barlow, T. Kumagai et al., Characterization of sub-Gaussian heat kernel estimates on strongly recurrent graphs、*Comm. Pure Appl. Math.*, 査読有り、58-12、2005、1642-1677
- ⑲ N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk、*J. Math. Soc. Japan*, 査読有り、57-4、2005、1179-1195
- ⑳ N. Konno, Limit theorem for continuous-time quantum walk on the line、*Phys. Rev. E*(3), 査読有り、72-2、2005、026113-026119
- [学会発表] (計10件)
- ① T. Funaki, Hydrodynamic limit for the $\nabla\phi$ interface model via two-scale approach, 2008-11-24, Trimester "Interacting particle systems, statistical mechanics and probability theory", Institut Henri Poincaré, Paris.
- ② T. Funaki, Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers, 2008-12-4, Workshop "Interplay of Analysis and Probability in Physics", Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach,
- ③ H. Osada, Stochastic Differential Equations on the Sierpinski Carpet, 3rd Conference on Analysis and Probability on Fractals, 2008-6-15, Cornell University
- ④ T. Kumagai, Stochastic calculus on manifolds, graphs, and Random structures, Diffusion on the scaling limits of critical percolation clusters in the diamond hierarchical lattice, 2007-10-12, Bonn (ドイツ) Hausdorff研究所.
- ⑤ T. Funaki, Scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks, 2007-10-4, The Mittag-Leffler Seminar, Institut Mittag-Leffler, The Royal Swedish Academy of Sciences.
- ⑥ T. Funaki, SPDE with distributions of Lévy processes as its invariant measures, Stochastic Partial Differential Equations, Workshop at Mittag-Leffler Institute, Sweden, 2007年9月13日.
- ⑦ H. Osada, Interacting Brownian motions related to random matrices, Stochastic Processes and its applications, 2007-8-7, イリノイ大学
- ⑧ T. Kumagai Recent developments in random walks, Heat kernel estimates and

Harnack inequalities for jump processes, 2007-7-6、Durham (英国)、LMS Durham symposium.

- ⑨ T. Funaki, Concentrations under scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks, Groupe de travail, Processus Stochastiques, Matrices Aléatoires”, 2007-3-23, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires des Universités Pierre et Marie Curie et Denis Diderot, Paris.
- ⑩ T. Funaki, Random motion of Winterbottom-like shape, Stochastic Analysis and Non-Classical Random Processes, 2005-5-13, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

[図書] (計 1 件)

- ① 舟木 直久、岩波書店、確率微分方程式、2005、Xviii+187

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長田 博文 (OSADA HIROFUMI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20177207

(2) 研究分担者

舟木 直久 (FUNAKI TADAHISA)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：60112174

篠田 正人 (SHINODA MASATO)
奈良女子大学理学部・准教授
研究者番号：50271044

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90234509

白井 朋之 (SHIRAI TOMOYUKI)
九州大学・大学院数理学研究科・教授
研究者番号：70312932

原 隆 (HARA TAKASHI)
九州大学・大学院数理学研究科・教授
研究者番号：20228620
(H20年度は連携研究者)

深井康成 (FUKAI YASUNARI)
九州大学・大学院数理学研究科・助教
研究者番号：00311837
(H20年度は連携研究者)

内山 耕平 (UTIYAMA KOHEI)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：00117566

松本裕行 (MATSUMOTO HIROYUKI)
名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：00190538

(H20年度は連携研究者)

種村 秀紀 (TANEMURA HIDEKI)

千葉大学・理学部・教授

研究者番号：40217162

(H20年度は連携研究者)

永幡幸生 (NAGAHATA YUKIO)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教

研究者番号：50397725

(H20年度は連携研究者)

樋口保成 (HIGUCHI YASUNARI)

神戸大学・理学部・教授

研究者番号：60112075

(H20年度は連携研究者)

三苫至 (MITOMA ITARU)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：40112289

(H20年度は連携研究者)

杉浦誠 (SUGIURA MAKOTO)

琉球大学・理学部・准教授

研究者番号：70252228

(H20年度は連携研究者)

今野紀雄 (KONNO NORIO)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：80205575

(H20年度は連携研究者)

籠屋恵嗣 (KOMORIYA KEISHI)

筑波大学・数理物質科学研究科・助教

研究者番号：40323258

乙部徹己 (OTOBE YOSHIKI)

信州大学・理学部・講師

研究者番号：30334882

(H20年度は連携研究者)

吉田伸生 (YOSHIDA NOBUO)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40240303

(H20年度は連携研究者)

梁 松 (LIANG SONG)

筑波大学・数理物質科学研究科・准教授

研究者番号：60324399

(H20年度は連携研究者)

半田賢司 (HANDA KENJI)

佐賀大学・理工学部・准教授

研究者番号：10238214

(H20年度は連携研究者)

(3) 連携研究者

()

研究者番号：