

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 7日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010年度～2012年度

課題番号：22740009

研究課題名（和文） 有限巡回群のモジュラー不変式論

研究課題名（英文） Modular invariant theory of finite cyclic groups

研究代表者

谷本 龍二 (TANIMOTO RYUJI)

静岡大学・教育学部・准教授

研究者番号：20547062

研究成果の概要（和文）：

有限巡回群によるモジュラー不変式論における計算代数的手法についての研究を行い、以下のアルゴリズムを作成した。素數位数の巡回群によるモジュラー不変式環の生成系を計算するアルゴリズムを、レイノルズ作用素の類似物を定義することにより作成した。また、正標数  $p$  の体上の多項式環における位数  $p$  の自己同型があたえられたとき、その自己同型に付随するねじれ微分の像への所属判定アルゴリズムも作成した。

研究成果の概要（英文）：

We studied computational algebraic methods in modular invariant theory of finite cyclic groups, and we constructed the following algorithms. We constructed, via defining a Reynolds-like operator, an algorithm for computing generators of modular invariant rings of cyclic groups of prime order. Furthermore, given a polynomial ring over a field of positive characteristic  $p$  and an automorphism of order  $p$  of the polynomial ring, we constructed the image membership algorithm for the twisted derivation associated with the automorphism.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュラー不変式論，計算不変式論，グレブナー基底，有限巡回群

## 1. 研究開始当初の背景

有限群による不変式論において、不変式環の生成系を求めることは基本的である。しかしながら、有限群が有限巡回群であると仮定しても、有限巡回群がモジュラーであるならば、不変式環の生成系を求めることは必ずしも

容易ではない。実際、正標数  $p$  の体上の多項式環に、位数  $p$  のモジュラー巡回群が既約かつ線形に作用しているとしても、以下の特殊な場合においてしか、不変式環の生成系が求められていなかった。 $n=2$  または  $n=3$  の場合 Dickson (1913年) により、 $n=4$  または  $n=5$

の場合 Shank (1998 年) により, 不変式環の生成系が求められた. このようにモジュラー不変式環の生成系を計算することが容易ではないという状況下において, モジュラー不変式環の生成系を計算するアルゴリズムの研究が Kemper (1996 年) により始められた. この Kemper のアルゴリズムの特筆すべき点は, レイノルズ作用素を回避できた点にある. モジュラー不変式論において, レイノルズ作用素がないということが病理現象の発端になっている.

他方, 一次元加法群による不変式環の生成系を計算するアルゴリズムが作成されている. このアルゴリズムは, 標数が零の場合で Van den Essen により作成され, 後に, Van den Essen のアルゴリズムを拡張する形で, 正標数の場合でも動くアルゴリズムが我々により作成された. これらのアルゴリズムは不変式環が有限生成なら停止するが, そうでなければ停止しない. なお, 正標数下において, 1 次元加法群が多項式環に線形に作用しているとき, 不変式環が有限生成になるかどうかは一般に分かっていない.

## 2. 研究の目的

有限群によるモジュラー不変式環の生成系は, 有限群の位数が素数としても特殊な場合でしか分かっていない. このような中, 本研究の目的は, 第一に, 素数位数の巡回群による不変式環の生成系を計算する新しいアルゴリズムを, レイノルズ作用素の類似物を定義することによって作成すること, そして, 第二に, そのアルゴリズムをもとに素数位数の巡回群によるモジュラー不変式環の生成系についてのデータを収集・整理・分析することにある. 意欲的に収集されているモジュラー不変式環の生成系のデータは, 素数位数の巡回群が多項式環に線形に作用しているときのデータが殆どであるため, 本研究では, 素数位数の巡回群が多項式環に非線形で正則に作用しているときのデータを収集する.

## 3. 研究の方法

(1) 正標数  $p$  の体上の有限生成整域に位数  $p$  の巡回群が正則に作用しているとする. 位数  $p$  の巡回群の生成元に付随し, ねじれ微分が定義できる. このねじれ微分を  $D$  とおくと,  $D$  は局所べき零であり, 位数  $p$  の巡回群による不変式環と  $D$  の核は一致する. それゆえ, 不変式環の生成系を計算するアルゴリズムの作成は, ねじれ局所べき零微分  $D$  の核の生成系を計算するアルゴリズムを作成することに帰着する. この核アルゴリズムは作成さ

れていない. そうではあるが, 標数零の体  $k$  上の有限生成整域における局所べき零微分の核を求めるアルゴリズムを Van den Essen は作成し, それを正標数の体上でもアルゴリズムが動くよう我々は拡張した. このような状況を踏まえて, 我々は, 我々自身のアルゴリズムを改変すること「局所べき零微分を, ねじれ局所べき零微分へ改変すること」を着想した. この着想を踏まえ, 我々の核アルゴリズムにあらわれている Dixmier 作用素のねじれ版 (レイノルズ作用素の類似物) を研究し, この作用素を用いた素数位数の巡回群による不変式環の生成系を計算するアルゴリズムの研究を行った.

(2) 標数零の体上の多項式環における局所べき零微分に対し, その微分の像への所属判定アルゴリズムが, Van den Essen により作成されていた. このアルゴリズムの「ねじれ版」を作成すること, すなわち正標数  $p$  の体上の多項式環における位数  $p$  の自己同型に付随するねじれ微分に対し, その微分の像への所属判定アルゴリズムを作成することを着想し, 研究を行った. また, 有限巡回群のコホモロジーと, ねじれ微分の核や像との関連にも着目し, 特殊な場合で, 素数位数の巡回群のコホモロジーの生成系を, 上述のねじれ微分の核アルゴリズムと像所属判定アルゴリズムを援用しながら計算した.

## 4. 研究成果

(1) 正標数  $p$  の体上の多項式環に, 位数  $p$  の巡回群が正則に作用しているとき, 不変式環の生成系を計算するアルゴリズムを作成した. アルゴリズムの作成にあたって, 一般に, 位数  $p$  の巡回群が正標数  $p$  の体上の整域に正則に作用している状況で, 位数  $p$  の巡回群の生成元からねじれ微分を定義し, そして, レイノルズ作用素の類似物を定義した. 我々の作成した素数位数の巡回群によるモジュラー不変式環の生成系を計算するアルゴリズムにおいては, レイノルズ作用素の類似物がかなめに用いられている.

標数 3 の体上の 3 変数多項式環における, 位数 3 の多項式自己同型が三角化可能であるときに (この多項式自己同型は線形とは限らない), 多項式自己同型の標準形を求めた. とくに, このような位数 3 の三角化可能な多項式自己同型がある自然な条件を満たすときに, その多項式自己同型が生成する位数 3 の巡回群による不変式環の生成系を, 上述の我々のアルゴリズムを走らせることによって求め, 不変式環が hypersurface ring になることを示した.

(2) 正標数  $p$  の体上の多項式環における位数  $p$  の自己同型があたえられたとき, その自己同型に付随するねじれ微分の像への所属判定アルゴリズムを作成した. このアルゴリズムは, あたえられた多項式が, ねじれ微分による原始関数を持つ持たないを判定するアルゴリズムになっている.

正標数  $p$  の体上の整域に, 位数  $p$  の巡回群が正則に作用しているとき, その巡回群の生成元に付随するねじれ微分を考え, ねじれ微分の像と核の共通部分を, ねじれ微分の台座イデアルと呼ぶことにする. 台座イデアルはねじれ微分の核におけるイデアルである.

標数 3 の体上の 3 変数多項式環に, 位数 3 の巡回群が既約かつ線形に作用しているとす. 巡回群の生成元は位数 3 の多項式自己同型であるが, この自己同型に付随するねじれ微分を考え, このねじれ微分の台座イデアルの生成系を, 上述のねじれ微分の像への所属判定アルゴリズムを走らせることによって求めた. 副産物として, 上記の作用のもと, 3 変数多項式環に係数をもつ位数 3 の巡回群のコホモロジーの生成系を計算することができた.

上記について, [雑誌論文] の(2)として発表した.

(3) 正標数  $p$  の代数的閉体上の多項式環に 1 次元加法群が線形に作用しているとき, 不変式環が代数として有限生成であるかどうかは一般に分かっていない. そこで, 余次元 2 の 1 次元加法群の正則表現の分類を試み, 2 つのタイプに分けることができた. この分類結果は, [雑誌論文] の(1)に発表した.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

### (1) 谷本 龍二

Representations of  $G_a$  of codimension two, Affine Algebraic Geometry, Edited by Kayo Masuda, Hideo Kojima and Takashi Kishimoto, World Scientific, 2013, 279-284.  
査読有り.

### (2) 谷本 龍二

The image membership algorithm for twisted derivations in modular invariant theory, Saitama Mathematical Journal 29 (2012), 55-64.  
査読有り.

[学会発表] (計 11 件)

### (1) 谷本 龍二

対称式の第一基本定理から計算不変式論へ, 長岡高専数学談話会, 2013 年 3 月 8 日, 長岡工業高等専門学校.

### (2) 谷本 龍二

ねじれ微分の像への所属判定アルゴリズムについて, 第 10 回アフィン代数幾何学研究集会, 2012 年 9 月 6 日, 関西学院大学.

### (3) 谷本 龍二

素数位数の自己同型に付随するねじれ微分の像について, 第 2 回多項式環論セミナー, 2012 年 8 月 21 日, 静岡大学.

### (4) 谷本 龍二

The image membership algorithm for twisted derivations in modular invariant theory, グレブナー若手集会, 2012 年 7 月 14 日, 慶應義塾大学.

### (5) 谷本 龍二

On modular invariants of  $p$ -cyclic groups, 第 9 回アフィン代数幾何学研究集会, 2012 年 3 月 14 日, 関西学院大学.

### (6) 谷本 龍二

有限巡回群の計算不変式論(II), グレブナー若手集会, 2012 年 2 月 17 日, 静岡大学.

### (7) 谷本 龍二

有限巡回群の計算不変式論(I), グレブナー若手集会, 2012 年 2 月 17 日, 静岡大学.

### (8) 谷本 龍二

Computational invariant theory for cyclic groups, 射影多様体の幾何とその周辺 2011, 2011 年 11 月 3 日, 高知大学.

### (9) 谷本 龍二

Wild  $p$ -cyclic group actions on algebras over fields of positive characteristic  $p$ , 第 8 回アフィン代数幾何学研究集会, 2011 年 9 月 2 日, 関西学院大学.

### (10) 谷本 龍二

有限群の計算不変式論, 第 1 回多項式環論セミナー, 2011 年 8 月 11 日, 静岡県コンベンションアーツセンター.

(11) 谷本 龍二

正標数のアフィン空間への  $G_a$  作用について, 第 16 回代数学若手研究会, 2011 年 3 月 8 日, 筑波大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷本 龍二 (TANIMOTO RYUJI)  
静岡大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 20547062

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし