科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2013
課題番号：２３６５４０４８

研究課題名（和文）流体の自由境界問題－過冷却現象と非安定性の解析－

研究課題名（英文）Free boundary problems of flows - kinematic undercooling and instability -

研究代表者
清水　扇丈（Shimizu, Senjo）

静岡大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：５０２７３１６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円、（間接経費）　840,000円

研究成果の概要（和文）：有界領域における相転移を伴う非圧縮性2相流のLp大域適切性,定常解のLp安定性を数学的に解析した．2相流体において初期相を有限個の部分で与える．平衡解は，０流速，定圧力，定温度で，自由界面の平衡解はすべて等半径の球面となる。球面が1つのときは安定，2つ以上のときは不安定となる．解が特異性を生成せず，自由境界の位相が不変ならば，解は時間大域的に存在する．さらに，表面張力が温度に依存し，過冷却現象を組み込んだ相転移モデルの解析を行ったが，表面張力が定数で過冷却がない場合と同様の結果が得られた．

研究成果の概要（英文）：Our study of the basic model for incompressible two-phase flows with phase transitions consistent with thermodynamics is extended to the case of temperature-dependent surface tension and kinematic undercooling. We prove well-posedness in an Lp-setting, study the stability of the equilibria of the problem, and show that a solution which does not develop singularities exist globally, and if its limit set contains a stable equilibrium it converges to this equilibrium as time goes to infinity, in the natural state manifold for the problem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：相転移モデル　過冷却　Navier-Stokes方程式　2相問題　自由境界問題　表面張力　マランゴニ力　最大正則性

1. 研究開始当初の背景

自由境界問題の研究は, 流速と圧力を考慮せず, 温度のみを未知関数としてエネルギー保存則として導かれる, ステファン問題と呼ばれる熱方程式に対する自由境界問題に始まる. 半沢 ('81) は半沢変換と呼ばれる自由境界の正則性を示すのに現時点でも最も優れた変換を用いて線形ステファン問題を解き, ナッシュの陰関数定理を応用して十分滑らかなデータに対する十分滑らかな時間局所解を構成した. また, 俣野 ('83) による弱解の研究, 谷-日下 ('99,'02) による古典解, ヘルダー空間での時間局所適切性の研究がある.

逆に温度を考慮せず, 流速と圧力を未知関数として質量保存則と運動量保存則として導出されるのがNavier-Stokes 方程式の自由境界問題である. 領域の形状から, 気泡や液滴（有界領域）の場合と, 海の波のように水平方向に無限で表面が自由境界（摂動層領域）の場合に分けられる. 有界領域に対しては主に Solonnikov はポテンシャル法によって, L_2 空間やヘルダー空間における時間局所・大域適切性を証明した. 摂動層領域に対しては, Beale('84), Beale-西田 ('85), 谷-田中 ('95) 等により L_2 空間での時間大域適切性や代数冪で時間減衰する結果が得られてきた.

相転移モデルは, ステファン問題と Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の双方を含む系であり, 上記の手法によっても解決できると考えられる. しかし, 一般的に通常良く用いられるナッシュの陰関数定理や Solonnikov のポテンシャル法はいずれも手の込んだ複雑なもので, それゆえ, 本研究で考えるより一般化された相転移問題に適用するのは困難なように思われる.

20 世紀末期から 21 世紀にかけて, 最大正則性は著しくその研究が進捗した. 1964 年の Ladyzenskaya-Solonnikov-Ural'tseva の研究に始まり, 1980 年代以降, 主にヨーロッパで Sobolevskii, Da Prato, Grisvard, Dore-Venni, Amann, Clement, Prüss, Kalton, Weis らにより詳細に研究され発展してきた. 熱方程式を一般化した, バナッハ空間 X 上の作用素 A に対する抽象発展方程式

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

が L_p-最大正則性を持つとは, 解析半群 A が 評価式

$$\|u'\|_{L_p(0,T;X)} + \|Au\|_{L_p(0,T;X)} \le C\|f\|_{L_p(0,T;X)}$$

を満たすことをいう. この場合の指数 p は時間に関する積分指数である. 作用素 A は 2 階の楕円型作用素を含み, 特に問題の最高階微分を摂動として取り扱う自由境界問題で決定的な役割を果たす.

自由境界問題の解析が困難であったのは, 自由境界を固定境界に変換することにより, 境界条件を込めて方程式系が準線形となるためである. 準線形方程式系の線形問題に対し最大正則性を証明すれば, ナッシュのような複雑な手法を使うことなく簡便な縮小写像の原理によって解の適切性を示すことができる. 実際, ステファン問題や Navier-Stokes 方程式の相転移を伴わない自由境界問題に対して, この線形化問題に最大 L_p 正則性を証明する方法で, Prüss, Simonett, 柴田, 清水等により, 局所解の適切性の結果が研究開始当初に得られていた.

2. 研究の目的

21 世紀に入り研究の進捗が著しい放物型偏微分方程式の最大正則性原理に着目して, 流体力学の中でも物理・工学の観点から重要な問題である, 熱力学平衡, 即ちエネルギーの出入りを考慮した流体の液相・気体相などの相転移に伴う自由境界問題の（以下これを相転移モデルと呼ぶ）安定性・非安定性解析を行うことを目的とする. 特に, 相転移モデルに過冷却現象が生じる場合のモデルを考察する.

3. 研究の方法

Jan Prüss 氏 (ドイツ・Halle 大学) と共同で, 質量保存則, 運動量保存則に加えて, 流速, 圧力, 温度を未知関数とする熱力学平衡, 即ちエネルギーの流入・散逸を考慮した相転移モデルを数学的に厳密に定式化した (5. 主な発表論文等中の文献 [5]. 以下同様). 流体

力学の様々な様相を厳密にモデル化した系は, 質量・運動量・エネルギーのつり合いを込めて閉じた系となる. 相転移モデルは, ステファン問題と Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の双方を含む系であり, 流体工学で注目される混相流を表現し, 熱効果により自由境界（正確には自由界面であるがここでは自由境界と呼ぶ）の法線速度が流速の法線速度と異なるときに相転移が生じる. この原理により相転移現象を記述できる.

私は相転移モデルに先立ち, Navier-Stokes 方程式の自由境界問題について, 自由境界を固定境界に直し準線形方程式系に変換し, その線形化方程式系の最大正則性原理を示し, 縮小写像の原理によって準線形方程式系の解の適切性を示してきた. 最大正則性により, 自由境界を固定境界に変換した準線形方程式系を解く方法は, 様々な自由境界問題及び準線形方程式系の問題の解法として汎用性が高いことを確信していた. 相転移モデルは未知関数及び方程式の数が多いため解析が複雑となるが, 線形化問題の最大正則性を証明する技法により見通し良く証明でき, その結果を用いて自由境界問題の解の適切性を簡便に証明できることを実証する.

4. 研究成果

(1) 各相で定密度, 表面張力が定数の相転移モデルに対する結果

① 線形問題の最大正則性原理に基づく L_p 空間枠での時間局所解の一意存在

動的な自由境界を固定境界に変換するいわゆる半沢変換を用いて, 初期境界を超平面で与えて相転移モデルを定式化すると, それは準線形型となるが, その線形化問題に最大正則性を適用して縮小写像の原理により準線形問題の時間局所適切性を示した ([5], [7], [8]). 相転移問題では, 初期時刻に境界にある流体粒子が常に境界にとどまらないため, それを要請する Lagrange 変換を用いることができない.

密度は各相で定密度であるが, 各相で等しい場合 ([5]) と, 各相で異なる場合 ([7], [8]) を考察した. 熱伝導係数, 粘性係数, 密度等のパラメータの中で, 密度が系の性質を決める決定的な役割を持ち, 密度が両相で等しい場合には温度が支配する系に, 密度が両相で異なる場合には流速が支配する系となることを証明した.

② 線形安定解析原理に基づく相転移モデルの平衡解の安定性解析

有界領域における 2 相流体を考え, 初期相を有限個（m 個）の部分で与える. 符号を反転させたエントロピーが, いわゆるリヤプノフ関数となり, 平衡解は, 0 流速, 定圧力, 定温度で, 自由界面の平衡解は m 個すべてが同じ半径の球面となる. 平衡解は, m 個の球面が互いにまた境界に接触しないことを仮定する. 平衡解の安定性を考察するため, 平衡解の周りでの線形化問題を考え, その固有値を調べた. 線形作用素は, 球面が 1 つの場合は実部正の固有値をもたず, 球面が 2 つ以上の場合は $m-1$ 個の正の固有値をもつ. この結果から, 球面が 1 つの場合は平衡解は安定で, 平衡解の近くから出発したすべての解は時間大域的に存在し, 平衡解の近くに留まること, 球面が 2 つ以上の場合は, 平衡解は不安定で, 平衡解の近くから出発した解で, ある時間経過後に平衡解から離れる解が存在するという結果を得た ([8]).

③ 解の時間大域的挙動

解が特異性を生成せず, 自由境界の位相が不変ならば, 解は時間大域的に存在し, 部分領域が連結のときには平衡解に収束する. 時間局所解が（相対）コンパクトであることを示すことが鍵となるが, 時間重み付き最大正則性により証明した ([8]).

(2) 各相で定密度, 表面張力が温度に依存し, 過冷却現象を組み込んだ相転移モデルに対する結果

流体の表面張力が温度の関数となった場合は, 表面張力が不均質になることが原因で運動量の釣り合い方程式には, 流体の流れが駆動するマランゴニ対流が生じる. また過冷却は表面エントロピーを生成し, 自由界面上のエネルギーの釣り合い式として, 表面熱拡散方程式となる新たな相転移モデルとなる. 表面張力は温度の減少関数であり, 表面張力が正である低温条件を仮定する. この相転移モデルに対して上記 ① ② ③

の順で解析を行った．平衡解は (1) の場合と等しく，0 流速, 定圧力, 定温度, m 個すべてが同じ半径の球面となる．(1) と同様の方法で, 球面が 1 つの場合は平衡解は安定で, 球面が 2 つ以上の場合は, 平衡解は不安定という結果を得た ([9]).

5. 主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

[1] J. Prüss, <u>S. Shimizu</u>, G. Simonett, M. Wilke, *On incompressible two-phase flows with phase transition and variable surface tension*, to appear in "Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics", Series: Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Birkhaeser-Verlag, 査読有.

[2] J. Prüss, <u>S. Shimizu</u>, M. Wilke, *On the qualitative behaviour of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of non-equal densities*, Comm. P. D. E., 39 (2014), 1236-1283, 査読有.

[3] J. Prüss, <u>S. Shimizu</u>, *On well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of non-equal densities*, J. Evolution Equations, 12 (2012), 917-941, 査読有.

[4] <u>S. Shimizu</u>, *Maximal regularity and its application to free boundary problems for the Navier-Stokes equations, American Mathematical Society*, Sugaku Expositions, 25 (2012), 105-130, 査読有.

[5] J. Prüss, Y. Shibata, <u>S. Shimizu</u>, G. Simonett, *On well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of equal densities*, Evolution Equations & Control Theory, 1 (2012), 171-194, 査読有.

[6] Y. Shibata, <u>S. Shimizu</u>, *On the maximal L_p-L_q regularity of the Stokes problems with first order boundary condition; model problems*, J. Math. Soc. Japan., 64 (2012), 561-626, 査読有.

[7] U. Massari, M. Padula, <u>S. Shimizu</u>, *Loss of control of motions from initial data for pending capillary liquid*, Quart. Appl. Math., 69 (2011), 569-601, 査読有.

[8] <u>S. Shimizu</u>, *Local solvability of free boundary problems for the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension in the whole space*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Springer, 80 (2011), 647-686, 査読有.

[9] Y.Shibata, <u>S. Shimizu</u>, *Maximal L_p-L_q regularity for the two-phase Stokes equations; Model problems*, J. Differential Equations, 251 (2011), 373-419, 査読有.

〔学会発表〕（計 15 件）

[1] <u>S. Shimizu</u>, End-point maximal L^1-regularity of the Cauchy problem for a parabolic equation, Vorticity, Rotation and Symmetry (III), Approaching limiting cases and fluid flow, CIRM, Luminy, France, May 5, 2014.

[2] <u>清水扇丈</u>, Stability of equilibria for incompressible two-phase flows with phase transitions, 偏微分方程式セミナー、北海道大学（札幌市）, 2013 年 12 月 16 日.

[3] J. Prüss, <u>清水扇丈</u>, G. Simonett, M. Wilke, 相転移を伴う有界領域内非圧縮性 2 相流の解の安定性 —表面張力が変数の場合-, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 愛媛大学（松山市）, 2013 年 9 月 27 日.

[4] S. Shimizu, Qualitative Behaviour of Incompressible Two-Phase Flows with Phase Transitions, 4th Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Tokyo Institute Tech. (Meguro-ku), Japan, September 19, 2013.

[5] S. Shimizu, Incompressible two-phase flows with phase transitions and variable surface tension, Mathematical Hydrodynamics and Parabolic Equations in honor of Vesvolod Solonnikov on the occasion of his 80th birthday, Steklov Institute, St.Petersburg, Russia, September 12, 2013.

[6] S. Shimizu, Qualitative behavior of incompressible two-phase flows with phase transitions, Workshop Linear and Nonlinear PDE, Pisa Univ., Pisa, Italy, August 1, 2013.

[7] S. Shimizu, Stability of equilibria for incompressible two-phase flows with phase transitions, Pacific RIM 2013, Sapporo Convention Center, Sapporo, Japan, July 4, 2013.

[8] J. Prüss, 清水扇丈, M. Wilke, 相転移を伴う有界領域内非圧縮性 2 相流の解の安定性—異密度の場合-, 日本数学会 2013 年度年会, 函数方程式論分科会, 京都大学（京都市）, 2013 年 3 月 23 日.

[9] 清水扇丈, On well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transitions in a bounded Domain, 「応用解析」研究会, 早稲田大学（新宿区）, 2012 年 12 月 1 日.

[10] S. Shimizu, Local well-posedness of incompressible two-phase flow with phase transition in a bounded domain, Mathflows, Porquerolles, France, October 24, 2012.

[11] Y.Shibata, S. Shimizu, On $\mathcal{R}$-sectoriality of the Stokes equations with first order boundary condition in a general domain, Parabolic and Navier-Stokes equations 2012, Banach Center, Bedlewo, Poland, September 7, 2012.

[12] S. Shimizu, On well-posedness of incompressible two-ohase flows with phase transitions, 37-th Sapporo symposium on Partial Differential Equations, Hokkaido Univ., Sapporo, Japan, August 27, 2012.

[13] 清水扇丈, On well-posedness of Incompressible two-phase flows, 非線形現象の数理と数値解析 2012, 富山大学（富山市）, 2012 年 5 月 26 日.

[14] J. Prüss, 清水扇丈, 相転移を伴う非圧縮性 2 相流の解の局所可解性, 日本数学会 2012 年度年会, 函数方程式論分科会, 東京理科大学（新宿区）, 2012 年 3 月 29 日.

[15] 清水扇丈, Maximal regularity and its application to incompressible flows with phase transitions, 広島微分方程式研究集会, 広島大学（東広島市）, 2011 年 10 月 8 日.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.shizuoka.ac.jp/ math/staffs/ shimizu.html
http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/ ssshimi/

6. 研究組織

研究代表者
清水　扇丈（SHIMIZU, Senjo）
静岡大学・理学研究科・教授
研究者番号：５０２７３１６５