

令和元年5月22日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17760

研究課題名(和文)フロッケ・トポロジカル相における対称性と相転移に関する理論研究

研究課題名(英文)symmetry and phase transitions for a system with Floquet topological phases

研究代表者

小布施 秀明 (Obuse, Hideaki)

北海道大学・工学研究院・助教

研究者番号：50415121

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：粒子の流出入効果を取り入れた量子ウォークの対称性を調べ、固有エネルギーが実数となることを保証するパリティ・時間反転対称性(PT対称性)を有する非ユニタリ・時間発展演算子の定義を与えた。さらにそのフロッケ・トポロジカル相を調べ、エッジ状態のみがPT対称性を破り、エッジ状態の振幅成分のみが時間と共に指数関数的に増幅するとの理論結果を得た。さらに、もつれ合った光子を用いた量子光学系においてPT対称な量子ウォークを構築し、理論予測の検証実験を行ったところ、理論結果とよく一致する結果を得た。この結果は、開放量子系においてもPT対称性を有する非エルミートなハミルトニアンによる記述が正しいことを保証する。

研究成果の学術的意義や社会的意義

開放系がPT対称性を有する非エルミートなハミルトニアンにより正しく記述されることは、古典光学系において実証されていたが、量子系も同様であるかは正確な実験系の構築が困難であるため、未解決問題となっていた。本研究により、量子ウォークに対しPT対称性を有する時間発展演算子を明らかにし、さらにそのフロッケ・トポロジカル相を理論的に調べ、実証実験を行うことにより、この問題の解決につながった。この研究成果を一因とし、ここ数年で開放量子系における非エルミート・ハミルトニアンによるアプローチの重要性が広く認知されるようになり、現在、非エルミート系に関する研究が世界中で盛んに行われるようになった。

研究成果の概要(英文)： We investigate symmetry of a quantum walk with effects of gain and loss. We identify an explicit definition of non-unitary time-evolution operator with PT symmetry, which is important to retain reality of eigen energy. We also study edge states of this model, and find that the probability originating from only edge states grows exponentially with time. We, further, verify the above results experimentally by the quantum walk implemented by optical devices with entangled photons. We confirm that the experimental result agrees with the theoretical prediction. This result provides the strong evidence that open quantum systems can be correctly described by non-Hermitian Hamiltonians with PT symmetry.

研究分野：理論物理

キーワード：フロッケ・トポロジカル相 対称性 アンダーソン転移 非エルミート系 PT対称性

## 1. 研究開始当初の背景

トポロジカル絶縁体とは、系の内部は絶縁体であるが、表面近傍には不純物散乱の影響を受けない金属的な状態を持つ新奇な電子状態を有する物質群である。この新物質についての基礎的な理解や、特殊な表面状態を応用した新デバイス開発を目指したトポロジカル絶縁体に関する実験・理論研究は、物性物理学において現在盛んに行われている研究分野の一つである。トポロジカル絶縁体の基礎理論は数学と密接な関わりがあることを反映し、トポロジカル絶縁体となるためには、様々な対称性(時間反転対称性、粒子-ホール対称性、カイラル対称性など)の有無を制御した上で、非自明なトポロジカル相となる物質パラメータが必要となる。非自明なトポロジカル相には有限のトポロジカル数が定義でき、トポロジカル数と表面状態の数が一致するバルク-エッジ対応が成立する。物質パラメータとしては、通常、強いスピン・軌道相互作用や内部磁化が必要とされるため、自然界でトポロジカル絶縁体となる物質は限られている。そこで、時間的に周期変動する外場を印加することにより、非自明なトポロジカル相を誘起することが可能なフロッケ・トポロジカル相に注目が集まっている。

従来のトポロジカル絶縁体の理論は、ハミルトニアンを基礎とし、ハミルトニアンに対する対称性の条件や、ハミルトニアンに対するトポロジカル数の計算法が研究されてきた。しかし、時間に依存する外場により誘起されるフロッケ・トポロジカル相に対しては、時間変動外場の一周分分の時間発展演算子に対する対称性やトポロジカル数を明らかにする必要があり、すなわち、ある瞬間におけるハミルトニアンの対称性やトポロジカル数を用いても、フロッケ・トポロジカル相を正しく理解することはできない。外場の周期が $T$ の時間発展演算子 $U(T)$ と時間に依存するハミルトニアン $H(t)$ は、 $U(T) = T \exp \left\{ -i \int_0^T H(t) dt \right\}$  ( $T$ は時間順序積を表す)という関係がある。物性理論では、外場が時間に依存する場合においても、ハミルトニアンを出発点として議論を行うことが一般的であるが、フロッケ・トポロジカル相において対称性の議論やトポロジカル数の計算を行う際に、ハミルトニアンを基にして時間発展演算子を導出するためには、右辺の指数関数を時間順序積に従って展開する必要がある。そのためには、近似的な指数展開法や数値的手法を用いる必要があるが、その時間発展演算子は長距離のホッピング項を含むため、厳密な理論的取り扱いが困難となる。結果として、フロッケ・トポロジカル相の対称性やトポロジカル数に関する系統的・普遍的理解には至っていない。

## 2. 研究の目的

上記の問題に対して、ハミルトニアンを明示的に導入すること無く、時間発展演算子を直接定義する離散時間量子ウォーク(以降、量子ウォークと表記する。詳細は後述。)と呼ばれるモデルは、時間発展演算子を局所的に扱うことができるため、極めて有効である。量子ウォークは、1990年代に量子情報・量子計算を行う理論モデルとして提唱され、2000年以降は、トラップ・イオン、光学系、冷却原子などを用いた多数の実験が行われている。量子ウォークにおけるトポロジカル相の研究は、2010年以降盛んに研究され、特に1次元量子ウォークの表面状態の実空間観測が実験により行われていることは特筆すべきことである。研究代表者は、1次元量子ウォークの研究を通じ、フロッケ・トポロジカル相特有の性質について明らかにしてきた。特に、時間発展演算子が時間反転対称性やカイラル対称性を有するためには、異なる時刻における時間発展演算子同士が特定の関係を満たす必要があることを示した。これは時間に依存しないハミルトニアンの対称性に対する議論とは全く異なる。また時間に依存しないハミルトニアンの場合、カイラル対称性を有する1次元系のトポロジカル数はwinding数で与えられることが知られているが、フロッケ・トポロジカル相に対しては、エネルギーが周期性を持つことを反映した新しいトポロジカル数が必要となることも明らかとなった。しかし、2次元空間以上となると、量子ウォークを含めフロッケ・トポロジカル相の対称性の制御や、適切なトポロジカル数について、系統的な理解には至っていない。

そこで本研究では、時間発展演算子を直接定義する量子ウォークを基盤モデルとして用いることにより、フロッケ・トポロジカル相における対称性の制御や非自明なトポロジカル相を特徴づけるトポロジカル数についての系統的な研究を行い、従来の時間に依存しないハミルトニアンでは現れないフロッケ・トポロジカル絶縁体特有の現象を明らかにすることを目的とする。この目的のために、量子ウォークの実験は、光学系が多いことを踏まえ、光振幅の増幅と減衰の効果を取り入れたPT対称性を有する非ユニタリーな量子ウォークにおけるフロッケ・トポロジカル相についての研究を行う。さらに、2次元系の量子ウォークのフロッケ・トポロジカル相についての研究を行う。

### 3. 研究の方法

まずは、本研究で用いる量子ウォークについて説明する。量子ウォークは、コイン演算子 $\hat{C}$ とシフト演算子 $\hat{S}$ という2種類の演算子の積の組み合わせにより定義される時間発展演算子 $\hat{U}$ を用いて、量子力学的な時間発展現象を記述する。具体例として、アップスピンとダウンスピンの2内部自由度を持つ1次元量子ウォークを考えると、図1に示すように、コイン演算子 $\hat{C}$ は粒子の内部自由度を変化させ、シフト演算子 $\hat{S}$ は粒子の内部自由度に応じて位置を変化させる。コイン演算子 $\hat{C}$ とシフト演算子 $\hat{S}$ は、それぞれユニタリー行列により定式化され、最も単純な時間発展演算子は $\hat{U} = \hat{S} \hat{C}$ となる。このように、量子ウォークでは、時間発展演算子を定義する際に、ハミルトニアンを導入する必要がないことが大きな特徴である。時刻 $t$ における量子状態は、時間発展演算子 $\hat{U}$ を初期状態に $t$ 回作用させ、 $|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(0)\rangle$ と記述されるため、時間発展演算子 $\hat{U}$ を時間的に周期変動する場合のある系の一周期時間発展演算子と解釈することができる。この対応関係により、量子ウォークのフロッケ・トポロジカル相を調べることが可能になる。

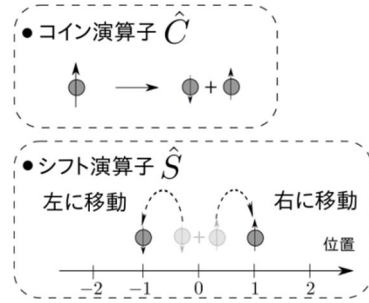


図1. コイン演算子とシフト演算子の概念図。

#### (1) PT 対称な非ユニタリー量子ウォークにおけるトポロジカル相

量子ウォークでは光学系を用いた実験系が多く採用されているが、このような系では、光が外界にもれることによる光強度の減衰が問題となる。一方で、ゲイン物質を用いることにより光強度を増幅することも可能であり、電子系にはない系の特徴と考えることができる。増幅・減衰がある系では粒子数が保存しないため、対応するハミルトニアンは非エルミートとなり、一般にエネルギー固有値は複素数となる。しかし1998年、非エルミート系であっても、Parity(空間反転)対称性と時間反転対称性を組み合わせたPT対称性がある場合、エネルギー固有値が実数となることが示された[Bender and Boettcher, PRL 80, 5243 (1998)]。このPT対称性を有する非エルミート系には、通常のエルミート系とは異なる特異な物理現象が起こることが明らかとなり、基礎理論・応用の両面から近年注目を浴びている。この観点からPT対称性を有する(時間に依存しない非エルミートなハミルトニアンに対する)トポロジカル相についての研究が行われているが、増幅・減衰効果の制御が困難であるため、電子系における実験は現在のところ行うことができない。一方、量子ウォークでは増幅・減衰の効果を取り入れた実験が可能であるため、PT対称性を有する非ユニタリー量子ウォークのフロッケ・トポロジカル相についての研究を行う。以下に具体的な研究手順を示す。

増幅・減衰効果を取り入れた非ユニタリー時間発展演算子に対するPT対称性の定義を明らかにする。この目的のために、量子ウォークのフロッケ・トポロジカル相の研究で確立した時間発展演算子の対称性の定義方法を利用する。

PT対称な1次元量子ウォークの対称性を明らかにした上で、この系のフロッケ・トポロジカル相について調べる。さらに、バルク-エッジ対応が成立するか否かについて数値計算を用いて明らかにする。また、PT対称な量子ウォークにおけるフロッケ・トポロジカル相を実験で調べるための実験系の提案を行う。

#### (2) 2次元空間の量子ウォークにおける対称性とトポロジカル相

これまでの申請者の1次元量子ウォークの研究により、時間発展演算子が時間反転対称性やカイラル対称性を有するためには、異なる時刻における時間発展演算子同士が特定の関係を満たす必要があることが分かった。またカイラル対称性を有する系のフロッケ・トポロジカル相に対しては、エネルギーの周期性を反映したトポロジカル数が必要となることも明らかとなった。これらの結果が、2次元のフロッケ・トポロジカル相に関しても、有効であるのかは分かっていない。そこで、本研究では、2次元空間における量子ウォークのフロッケ・トポロジカル相についての研究を行う。以下に具体的な研究手順を示す。

実在する実験を念頭に、内部自由度が2の2次元量子ウォークを構築し、以前の研究で明らかになった対称性の関係式を用いて、2次元系量子ウォークにおける時間反転対称性、粒子-ホール対称性、カイラル対称性などの対称性の有無、さらには実験的に可能な対称性の制御方法について議論する。さらに、時間反転対称性が破れた2次元量子ウォークに対し、トポロジカル数を解析的に計算する。さらに、数値計算結果と比較し、バルク-エッジ対応が満たされているか確認する。

実験検証を念頭に、この2次元量子ウォークにおいてエッジ状態が現れるある一点に局在した波束の時間発展を数值的、解析的に調べる。



#### 4. 研究成果

##### (1) PT 対称な非ユニタリー量子ウォークにおけるトポロジカル相

###### 非ユニタリー時間発展演算子に対する PT 対称性の定義

非ユニタリー時間発展演算子を記述するため、コイン演算子とシフト演算子に加え、新たに非ユニタリーな状態変化に対応する増幅-減衰演算子  $\hat{G}$  を導入した。この演算子は、内部自由度の一つを  $g$  倍し、もう一つを  $1/g$  倍する。これらの演算子を用いた非ユニタリーな時間発展演算子の対称性を検証することにより、PT 対称な非ユニタリー時間発展演算子となるための条件を調べた。その結果、非ユニタリーな時間発展演算子  $\hat{U} = \hat{G}^{-1}\hat{S}\hat{C}\hat{G}\hat{S}\hat{C}$  が PT 対称性を有することを明らかにした。さらに、コイン演算子や増幅-減衰演算子のパラメータが空間変化する場合、PT 対称性を満たすためのパラメータの位置依存性も明らかにした。さらに、PT 対称性を一般化した擬エルミート性を有するための条件も明らかにした。

###### PT 対称性な非ユニタリー量子ウォークのフロッケ・トポロジカル相

で定義した PT 対称性を有する量子ウォークのトポロジカル相を調べた。解析の結果、このモデルは、PT 対称性以外にも、粒子-ホール対称性とパリティ-カイラル対称性を有することが分かった。そこで、ユニタリーな場合にカイラル対称性を有する時間発展演算子に対してトポロジカル数を計算する以前の手法を拡張し、PT 対称な 1 次元非ユニタリー量子ウォークのトポロジカル数を解析的に計算した。その結果を図 2 に示す。この結果に従って、トポロジカル数が空間的に変化する系においてエッジ状態の存在を数値的に確かめたところ、バルク-エッジ対応が成立することが明らかとなった。しかしながら、エッジ状態のみが PT 対称性を破るために、エッジ状態の(擬)固有エネルギーは複素数となる。このことを反映し、本 PT 対称な非ユニタリー量子ウォークの時間発展を考えると、エッジ状態のみの振幅成分が指数関数的に増幅することが明らかとなった。

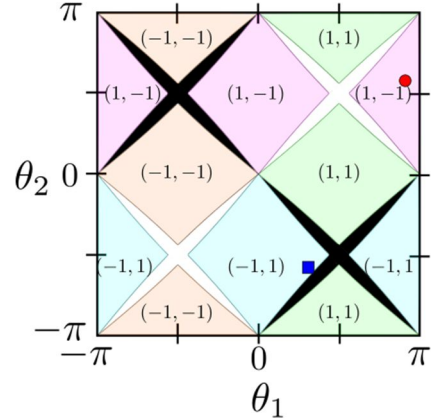
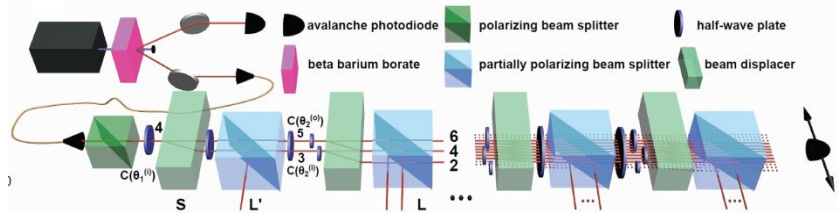


図 2. PT 対称な非ユニタリー量子ウォークのトポロジカル数のパラメータ依存性。

###### 検証実験

上記理論研究で導入した増幅-減衰演算子は、特定の実験系で実現することが可能である。さらに、増幅を行わず減衰のみの場合でも本質的な理論結果は変わらず、さらにもつれ合った光子を用いた量子光学系における実験も可能である。このことから、中国南京大学の P. Xue 教授の実験グループと国際共同研究を行い、実証実験を行った。その結果、理論結果と同様に、フロッケ・トポロジカル相により誘起されたエッジ状態のみが PT 対称性を破ることを示す実験結果を得た。これは、開放量子系も PT 対称性を用いた非エルミートな量子力学により記述できることを保証する極めて重要な結果である。この結果をまとめた論文は、その重要性



が評価され、Nature Physics 誌に掲載された。この検証実験は、当初想定していた以上の成果である。

図 3. もつれ合った光子を用いた量子光学系における PT 対称な非ユニタリー量子ウォークの実験系。

この結果は、下記の通り所属大学を通じプレスリリース発表を行った：

粒子が入り出る状況下における特殊な量子状態に関する理論を構築し、実験で裏付け

([https://www.hokudai.ac.jp/news/20170825\\_ko.pdf](https://www.hokudai.ac.jp/news/20170825_ko.pdf))

さらに、発展研究として、高いトポロジカル数を有する 1 次元量子ウォーク。高いトポロジカル数を持つ 1 次元量子ウォークは、3 ステップ量子ウォークを用いることにより実現できる事を示し、さらに PT 対称性を有する条件を明らかにした。高いトポロジカル数を有するフロッケトポロジカル相を反映し、この系ではゼロ及びパイエネルギーに、それぞれ、最大 3 重縮退したエッジ状態が現れることが分かった。さらに、実験で得られる光子の存在確率からエッジ状態の縮退度を判別する手法を明らかにした。

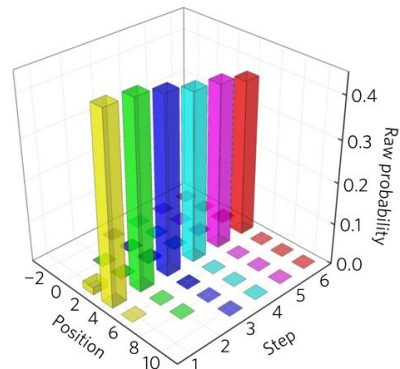


図 4. 量子光学系により実装した PT 対称な非ユニタリー量子ウォークにおけるエッジ状態の観測結果。

## (2) 2次元空間の量子ウォークにおける対称性とトポロジカル相

### 2次元量子ウォークの対称性とトポロジカル相

内部自由度が2の2次元2自由度量子ウォークの時間発展演算子の対称性を調べたところ、この系では時間反転対称性が破れているため、パラメーターにより、class A または class D に分類されることがわかった。さらに、ある一方向に対しフーリエ変換を行い、有効的な1次元モデルに変換すると、あるパラメーター領域においてはカイラル対称性を有することが明らかとなった。このことを踏まえトポロジカル数を計算し、さらにエッジ状態を数値的に調べたところ、バルクエッジ対応が成立することが明らかとなった。

### 2次元エッジ状態上の波束の時間発展

エッジ状態を反映した波動関数の時間発展を数値的、解析的に調べた。その結果、分散関係より期待される群速度最大のモードの寄与が最も大きくなることなどが解析的に確認された。

## 5 . 主な発表論文等

### 〔雑誌論文〕(計 5 件)

- (1). Lei Xiao, Xingze Qiu, Kunkun Wang, Zhihao Bian, Xiang Zhan, Hideaki Obuse, Barry C Sanders, Wei Yi, Peng Xue,  
“Higher winding number in a nonunitary photonic quantum walk”,  
Physical Review A **98**, 063847 -1-10(2018) [査読あり]  
DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063847
- (2). L. Xiao, X. Zhan, Z.H. Bian, K.K. Wang, X. Zhang, X.P. Wang, J. Li, K. Mochizuki, D. Kim, N. Kawakami, W. Yi, Hideaki Obuse, B.C. Sanders, P. Xue  
“Observation of topological edge states in parity-time-symmetric quantum walks”,  
Nature Physics **13**, 1117-1123 (2017) [査読あり].  
DOI: 10.1038/nphys4204
- (3). Takako Endo, Norio Konno, Hideaki Obuse, Etsuo Segawa,  
“Sensitivity of quantum walks to a boundary of two-dimensional lattices: approaches based on the CGMV method and topological phases”,  
Journal of Physics A -Mathematical and Theoretical **50**, 455302:1-40 (2017) [査読あり]  
DOI: 10.1088/1751-8121/aa8c5e
- (4). Ken Mochizuki and Hideaki Obuse,  
“Effects of Disorder on Non-unitary PT Symmetric Quantum Walks”,  
Interdisciplinary Information Sciences **23**, 95-103 (2016) [査読あり]  
DOI: 10.4036/iis.2017.A.12
- (5). Ken Mochizuki and Hideaki Obuse,  
“Explicit definition of PT symmetry for nonunitary quantum walks with gain and loss”,  
Physical Review A **93**, 062116 -1-13(2016) [査読あり]  
DOI: 10.1103/PhysRevA.93.062116

### 〔学会発表〕(計 44 件)

- (1). (招待講演) 小布施 秀明,  
“PT対称な非エルミート系におけるトポロジカル相と実証実験：量子ウォークによるアプローチ”，日本物理学会第74回年次大会 領域4,1,5,11 合同シンポジウム「非エルミート量子力学の新展開」(2019年).
- (2). (国際学会招待講演) Hideaki Obuse,  
“Topological Phases on Non-Hermitian systems with PT symmetry: Quantum Walk Approach”, Topological Material Science: 4th Annual Meeting (2019年).
- (3). (招待講演) 小布施 秀明,  
“PT対称な非エルミート系におけるトポロジカル相と実証実験：量子ウォークによるアプローチ” 第10回トポロジー連携研究会「非平衡系・非エルミート系の新奇量子現象」(2018年).
- (4). (国際学会招待講演) Hideaki Obuse,  
“Topological phases on PT symmetric non-unitary quantum walks”, second TMS-PKU alliance workshop in Beijing (2018年).

- (5). (国際学会招待講演) Hideaki Obuse,  
“Topological phases on quantum walks”, Workshop: Mathematical approach for topological physics (I), (2018 年).
- (6). (国際学会招待講演) Hideaki Obuse,  
“Floquet Topological Phases in PT Symmetric Quantum Walks with Gain and Loss”, The 1st Asia-Pacific Workshop on Trapped Quantum Systems (APTQS 2017) (2017 年).
- (7). (国際学会招待講演) Hideaki Obuse,  
“Topological phases of quantum walks”, Mini Workshop: Mathematical Aspects of Topological Phases of Matter and Quantum Computing (2017 年).
- (8). (招待講演) 小布施 秀明,  
“量子ウォークにおけるトポロジカル相”, 日本物理学会第 72 回年次大会 領域 11, 1 合同シンポジウム「量子ウォークの深化とその周辺」(2017 年).
- (9). (招待講演) 小布施 秀明,  
“量子ウォークにおけるトポロジカル相、及びアンダーソン転移との接点”, 数理解析研究所(RIMS)研究会「臨界関数不等式に関わる諸問題が持つ不変構造の探求」(2017 年).
- (10). (招待講演) 小布施 秀明,  
“量子ウォークにおけるトポロジカル相：物性物理的観点から”, 量子系の数理と物質制御への展開 II：量子ウォークを架け橋に (2016 年).
- (11). (招待講演) Hideaki Obuse, Ken Mochizuki, Dakyeong Kim, and Norio Kawakami.  
“Floquet Topological Phases Driven by PT Symmetric Non-unitary Time Evolution”, Topological Material Science 2nd Annual Meeting (2016 年).
- (12). (招待講演) Hideaki Obuse,  
“Quantum dynamics associated with topological phases in synthetic quantum systems”, Okinawa school in physics : Coherent Quantum Dynamics (2016 年).
- (13). (招待講演) Hideaki Obuse,  
“Floquet Topological phases of quantum walks and its connection to network models”, International Workshop Anderson Localization in Topological Insulators (2016 年).

他 31 件 .

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ: <https://sites.google.com/site/hideakiobuse/>

## 6 . 研究組織

本研究に研究分担者、研究協力者はいない .

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。