様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１　年　５　月　２９　日現在

研究種目：基盤研究　(C)
研究期間：2007～2008
課題番号：19540199
研究課題名（和文）　非線形双曲放物型特異摂動問題の研究

研究課題名（英文）　Nonlinear hyperbolic-parabolic singular perturbation

研究代表者
山崎　多恵子(YAMAZAKI TAEKO)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：60220315

研究成果の概要：時間に関する２階微分の項がパラメータを係数とする消散項のある双曲型方程式のパラメータを０に近づけると、形式的には放物型方程式となる。臨界べきまたはそれよりも遅く減衰する消散項を持った線形および非線形双曲型方程式と対応する放物型方程式の解との差の時間一様な評価、さらに時間減衰評価を得た。更に、この結果を Kircchoff 型準線型方程式に応用し、特異摂動問題における時間減衰収束評価を示すと同時に大域解の一意存在も示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	600,000	180,000	780,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：双曲型方程式, 特異摂動問題, 消散項, Kirchhoff 方程式

１．研究開始当初の背景

時間に関する２階微分の項がパラメータを係数とする消散項のある双曲型方程式のパラメータを０に近づけると，形式的には放物型方程式となる．例えば弦の振動を表す摩擦を考慮したモデルとして現れる消散項のある双曲型方程式において，線密度を０に近づけると，双曲型方程式は放物型方程式となる．このときに，消散項のある双曲型方程式の解が対応する放物型方程式の解に漸近することが期待できる．本研究では，その様な双曲・放物型特異摂動問題を考察する．

線型の場合の消散項のある双曲型方程式の特異摂動問題は 1963 年の Kisynski 以来多くの研究があり，パラメータを 0 に近づけたときに対応する放物型方程式の解との差の収束評価が与えられてきた．中でも，2004 年 Chill and Haraux は，消散項の係数が定数の場合に，初期層が現れない初期データに対し，消散型線形双曲型方程式の解と対応する放物型方程式の解の差について，パラメータに関する収束評価のみでなく時間に関する減衰評価を示した． その後，研究代表者は大学院生の橋本洋通君との共同研究において，消散項の係数が時間変数のみに依存し減衰せずに正の下限がある場合に，

初期層が現れる場合の初期値も考慮して，解の差の時間減衰収束評価を与えた．
一方，パラメータを伴わない減衰する消散項を持った線形双曲型方程式の解の漸近挙動は消散項の減衰度により異なる事が知られている．減衰度が臨界べきよりも大きい時には消散項の働きは弱く，消散項を持たない線形双曲型方程式の解に漸近し，減衰度が臨界べきよりも小さいときには消散項の効果で解のエネルギーは減衰する．特に、臨界べきよりも小さい減衰度の時間変数係数の消散項を持つ線形双曲型方程式の解は放物型方程式の解に漸近することを2006年に研究代表者は示した．
そこで，消散項の係数の減衰度が臨界べき以下の時には，パラメータを 0 に近づけたときに対応する放物型方程式の解との差の時間に関して減衰するパラメータに関する収束評価を示すことができるのではないかと期待できる．

上記は線形方程式の場合であるが，正定数係数の消散項を持つ Kirchhoff 型準線型双曲型方程式に対する双曲・放物型特異摂動問題は，1988年Esham and Weinachtにより最初に扱われた．1996年Matsuyama，2001年Gobbinoにより研究されたが，それまでの結果における消散型線形双曲型方程式の解と対応する放物型方程式の解の差の評価は時間局所的であった．その後，研究代表者は橋本君との共同研究で，パラメータに関する時間減衰収束評価を示した．しかし，消散項の係数が変数係数の場合の特異摂動問題の結果はそれまでに知られていなかった．
一方，時間減衰する係数の消散項を持つ Kirchhoff 型準線型双曲型方程式に対する大域的可解性に関する結果は，1999年Onoにより最初に示された．Onoが扱ったのは主部がmildly degenerate の場合であるが，消散項の係数の減衰の多項式次数は 1/3 以下であり，臨界べき１よりも小さかった．2003年Nakao and Bae により有界領域・一般的にはポワンカレの不等式が成立する領域のときに，臨界べき以下の一般的な非線形消散項を持つ場合の大域解の一意存在が示された．

２．研究の目的

本研究の目的は，まず，臨界べき次数またはそれよりも遅く時間減衰する消散項を持った線形双曲型方程式の特異摂動問題において，放物型方程式の解との差の時間一様な収束評価，さらに時間減衰収束評価を得ることである．また，解の時間微分の差について、 初期層を記述する評価をする．
次いで，上記の線形の結果を，時間減衰する消散項を持ったKirchhoff 型準線型双曲型方程式へ応用する．特異摂動問題と同時に，有界とは限らない一般の領域において臨界ベキ以下の減衰度の係数の消散項を持つKirchhoff 型準線型双曲型方程式の大域解の存在も示す．

３．研究の方法

(1) 可分なHilbert空間におけ減衰する時間依存の係数の消散項がを持つ線形抽象双曲型方程式についての特異摂動問題を考察する．

① まず，係数が臨界べきより遅く減衰する場合を考察する．Chill and Haraux は 定数係数の消散型抽象波動方程式の解を，方程式の主部に現れる自己共役作用素に対応するスペクトル分解を用いて高周波成分と低周波成分に分解し，高周波部分は早いオーダーで減衰し，低周波成分については解表示の公式を用いて，抽象熱方程式の解との差を評価した．本研究で扱っている変数係数の場合も同様に，消散型抽象線形双曲型方程式の解をスペクトル分解により高周波成分と低周波成分に分解する．但し，Chill and Haraux で扱った場合と異なり係数の大きさが時間に依存するので，高周波成分と低周波成分の領域を分ける境界はパラメータ及び時間に依存するものとする．高周波部分はエネルギー評価を用いてパラメータの逆数及び時間変数に関して指数減衰することを示す．低周波成分については，さらに２成分に分解し，パラメータを 0 に近づけたときに，一方の成分は放物型方程式の解に漸近し，もう一方はそれ自身が 0 に漸近することを表す評価を，２成分に関する積分方程式系から導く．

② 次に消散項の係数が臨界べきの場合を考察する．解の時間とパラメータに依る評価を厳密に行い，パラメータを十分小さくしたときの線形抽象双曲型方程式の解と対応する放物型方程式の解の差に対し，パラメータによる収束評価を与える．

(2) 臨界べきまたはそれより遅く減衰する時間依存係数の消散項をもつKirchhoff型準線型双曲型方程式の初期値問題について，特異摂動問題と大域的可解性を考察する．
上記(1)の線形摂動問題を応用する．方法は，以下の通りである．

① Kirchhoff型準線型双曲型方程式と対応する放物型方程式を仲介するもう１つの線形放物型方程式を導入し，２ステップに分

ける．

② Kirchhoff 型準線型双曲型方程式とその解に依存する線形放物型方程式の解の差について以下のように評価する．上記（1）で示した線形の線形方程式に対する摂動問題に関する定理の結果及び仮定における変数の依存性を明らかにし，Kirchhoff 型準線型双曲型方程式の局所解の存在性から，線形摂動問題の定理を通して，大域解の存在性と摂動問題に対する評価を導く．橋本君との共同研究において定数係数の消散項を持つKirchhoff 型準線型双曲型方程式に関する摂動定理を示した際には，Kircchoff 型準線型双曲型方程式の解の減衰評価を独立に求め線形摂動定理の仮定をみたすことを示したが，ここでは，減衰評価，大域解の存在を摂動評価と連動させて示す．すなわち，解に依存する主部の係数となる関数が線形摂動問題の定理における条件をみたすと仮定した上で，摂動定理の結論と放物型方程式の解の減衰評価をあわせ用いると，線形摂動定理の条件が満たされる事を導く．そのことにより，線形摂動定理の仮定及び結論がすべての正の時間で成り立つことが従い，Kirchhoff 準線型双曲型方程式の大域解の存在も得られる．

③ 中間的な方程式と元の放物型方程式の解を比較し減衰評価を示す．

４．研究成果

(1)　消散項が減衰する時間依存の係数を持つ消散型線形抽象双曲型方程式についての特異摂動問題

①　係数が臨界べきより遅く減衰する場合．パラメータを０に近づけたときの線形抽象双曲型方程式の解と対応する抽象放物型方程式の解の差に対し，パラメータによる時間減衰収束評価を与えた．時間減衰評価は各方程式の解の単独の減衰評価よりも速い．また，初期値の微分可能性があがるとパラメータによる収束のオーダーもそれに伴い上がることもいえる．このことよりパラメータを０に近づけたときの線形抽象双曲型方程式の解が対応する放物型方程式の解に近づくことが従う．解の時間変数に関する１階微分にたいしては初期層を記述する項が現れ，それは，パラメータの逆数と時間変数に関して指数減衰する．

② 消散項の係数が臨界べきの場合．
パラメータを十分小さくしたときの線形抽象双曲型方程式の解と対応する放物型方程式の解の差に対し，パラメータによる収束評価を与えた．そのことにより，双曲型方程式の解が対応する放物型方程式の解に近づくことが従うが，①と異なり，解の差の時間減衰評価が，各方程式の解単独の減衰評価より速くはならない．

(2) 臨界べきまたはそれより遅く減衰する時間依存係数の消散項を伴う Kirchhoff 型準線型双曲型方程式の解と対応する放物型方程式の解の特異摂動問題と大域的可解性

① 自己共役作用素の適当なベキ乗の定義域に属する任意の初期値に対し，パラメータが十分小さければ，大域的一意解が存在することを示した．

② ①と同時に，Kirchhoff 型準線型双曲型方程式の解と対応する放物型方程式の解の差に関しパラメータに関する時間減衰収束評価が得られた．時間減衰評価に関しては線形方程式と同様に，係数が臨界べきより遅く減衰する場合には各方程式の解の単独の減衰評価よりも速い．　一方，臨界べきの場合には解の時間減衰評価は，各方程式の解の減衰評価より速くはならない．
解の時間変数に関する１階微分にたいしては，線形の場合と同様に初期層の影響が現れ，それは，パラメータの逆数と時間変数に関して指数減衰する．

（３）松山登喜夫氏は，伝播速度が時間に依存した線形波動方程式の解の L^p-L^q 評価式を導出した．ここで伝播速度の時間に関する regularity は局所 Lipschitz 級である．この係数の導関数が時間変数について可積分であるものの全体のクラスを考え，Schauder-Tychonoff の不動点定理を用いることにより さらにKirchhoff 方程式の解に対しても L^p-L^q 評価式を得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５　件）

1. Taeko Yamazaki, Hyperbolic-parabolic singular perturbation for quasilinear equations of Kirchhoff type with weak dissipation, Math. Methods in Appl. Sci. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 査読有り，印刷中 (Published Online: Jan 19, 2009).

2. Tokio Matsuyama, L^p-L^q estimates for wave equations and the Kirchhoff equation, Osaka Journal of Mathematics, 査読有り, Vol.45, No.2, (2008) 491—510.

3. Maria Alessandra Ragusa and Atsushi Tachikawa, Regularity of minimizers of some variational integrals with discontinuity, Z. Anal. Anwend. 査読有り, Vol.27, No.4, (2008) 469—482.

4. Taeko Yamazaki, Diffusion phenomenon for abstract wave equations with decaying dissipation, Advanced Studies in Pure Mathematics, Asymptotic Analysis and Singularities, 査読有り, Vol.47, No.1, (2007) 363—381.

5.Michihiro Hashimoto and Taeko Yamazaki, Hyperbolic-parabolic singular perturbations for quasilinear equations of Kirchhoff type, J. Differential Equations, 査読有り, Vol.237, (2007) 491—525.

〔学会発表〕（計 6 件）

1. Taeko Yamazaki, Singular limit problem Singular limit problem for Kirchhoff equation with weak dissipation, Linear and Nonlinear Waves, No.6, 2008 年 12 月 10 日, 滋賀県立県民交流センター.

2. Taeko Yamazaki, Singular limit for Kirchhoff type quasilinear hyperbolic equation with weak dissipation, 7th. AIMS Conference, 2008 年 5 月 19 日, The University of Texas, USA.

3. Tokio Matsuyama, Geometrical optics for hyperbolic equations, 研究集会”Decay and regularity for solutions of differential equations and dynamical systems”, 2008 年 9 月, Department of Mathematics and Informatics of the University of Cagliari, Italy.

4. Taeko Yamazaki, Singular perturbation for the Kirchhoff equation with decaying dissipation, Symposium on PDE of Tokai University, 2007 年 10 月 31 日, 東海大学.

5. 山崎　多恵子, Kirchhoff 型方程式の特異摂動問題について, 研究集会「非線形の諸問題」, 2007 年 9 月 27 日, 鹿児島県市町村自治会館.

6. Atushi Tachikawa, "Partial regularity of harmonic maps into Finsler spaces" （International Conference ``Variational Problems in Geometry", 2007 年 9 月 19 日、於：仙台国際センター.

６．研究組織

(1)研究代表者

山崎　多恵子
東京理科大学・理工学部・教授,
研究者番号　60220315

(2)研究分担者

松山　登喜夫
東海大学・理学部・教授,
研究者番号　70249712

(3)連携研究者

小林　隆夫
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号 90178319

立川　篤
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号 50188257

牛島　健夫
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号 30339113