

平成 22年 4月 20日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2009

課題番号：19540207

研究課題名 (和文) パンルヴェ型非線形方程式の量子差分

研究課題名 (英文) Quantization of difference nonlinear equation of Painleve type

研究代表者

長谷川 浩司 (HASEGAWA KOJI)

東北大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：30208483

研究成果の概要 (和文)：

パンルヴェ方程式は100年ほど前に発見された6つの2階非線形常微分方程式であって、アフィンワイル群対称性をもつ非自励的ハミルトン系であり、モノドロミー保存変形やソリトン系の簡約から生じる。本課題では同様に現れる偏微分系あるいは高階常微分系で高い対称性をもつパンルヴェ型方程式について、対称性を保つ差分化、正準量子化、これらを行なう量子差分化を主に研究し、ソリトン系の量子化の簡約としての定式化や、共形場理論の一般化としての定式化を与えることに成功した。

研究成果の概要 (英文)：

Painleve equations are second order nonlinear ordinary differential equations with certain good properties discovered in early 1900s. They are nonautonomous Hamiltonian systems allowing affine Weyl group symmetry, arise from monodromy preserving equations as well as solitonic partial differential equations through dimensional reduction. Painleve type equations are those equations with high symmetry, partial or of higher order in general, arising in similar ways. We investigate the canonical quantization of Painleve type equations and difference versions thereof. In particular we gave the quantized difference Painleve equations via the reduction of quantized solitonic systems, as well as the formulation as generalization of conformal field theories.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：可積分系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：パンルヴェ方程式 ソリトン系 対称性 量子群 量子化 差分化

## 1. 研究開始当初の背景

パンルヴェの非線形方程式は、およそ100年前に新たな特殊関数論を拓くべく発見された。その後高い対称性が岡本和夫らによって明らかにされ、同様の対称性をもつ野海・山田系へと一般化されている。これらはまた、ソリトン系と総称される非線形偏微分方程式に関係して、特殊解が満たす方程式としても現れる。

こうした可積分系については、いわゆる可解格子模型の観点から、その量子化や差分化を組織的に行うことが示唆され、その際に系相互の関連も保たれると期待される。これを現在の観点で明示的に遂行しつつ、そのために新たに必要な知識があれば開拓し、可積分系世界の拡大をめざすことが本研究の主眼であった。

## 2. 研究の目的

パンルヴェ型方程式について、その量子化（非可換化）および差分化について研究すること。また、それらのソリトン系などとの関係を明らかにすること。

## 3. 研究の方法

ソリトン系の量子差分化はFaddeev-Volkovによってサイン・ゴールドン系について具体的に行われた。サイン・ゴールドン系は自己相似簡約によってパンルヴェ III 型方程式へ退化することが知られている。そこで、パンルヴェ型差分方程式系に対するアフィンワイル群の作用とソリトン系の離散時間発展の類似等を参考としつつ、簡約の手続きの量子差分化について考察しつつ、対称性の由来を探った。また、ソリトン階層とFaddeev らの構成の関連は明らかでないので、この方向からの考察も行った。

パンルヴェ方程式の量子差分化は、野海と山田による対称性の研究をふまえ、長谷川により考察されていたが、この方法ではラックス表示が明らかでなく、一般化した場合の保存量の扱いをはじめ不満がある。また、IV 型の場合の対称性の定式化に関連しても、格子模型的な意味での隣接サイト相互間での変数を変換する対称性の考察が重要と思われた。これについて、黒木はあるべき普遍的な代数構造の観点から考察した。

名古屋は量子系における解の考察、量子差分系における対称性の考察を行った。

また菊地は、一般化されたドリinfeld・ソコロフ階層の差分化やそのそう時間焼くについて考察した。

## 4. 研究成果

長谷川は、パンルヴェ型方程式系の量子差分化（量子離散化）について二通りの構成を与えた、すなわち、アフィンワイル群の非可換体へのハミルトン作用を与えることによる構成と、Faddeev によるソリトン系の量子差分化の非自励化を与えてその自己相似簡約を行う構成であり、とくにパンルヴェ VI 型の場合に詳細な計算を行った。

連携研究員の黒木は、格子模型を含む量子離散系に量子群から定まる対称性の一般論を示し、幾何クリスタル構造との密接な関係を示した。また、モノドロミー保存変形の量子化の共形場理論の合流化としての研究を行った。

名古屋は神保、Sun とともに量子パンルヴェ方程式の相関関数の積分表示を与えた。またRamaniらとともに、量子差分化された系において、ディンキン図形の折り返し変換に対応する変換を与え、またいろいろなアフィンワイル群対称性をもつ量子系離散についてそれらの連続極限を調べた。

菊地は筧三郎とともにソリトン系からの簡約としてパンルヴェ方程式の全てを導くことに成功した。また、やはり筧とともに、一般化されたドリinfeld・ソコロフ理論の差分化から差分パンルヴェ方程式を導く試みを行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- 1 K Hasegawa, "Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation", to appear in *Advanced Studies in Pure Mathematics* 査読有
- 2 G Kuroki, Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé system, to appear in *Advanced Studies in Pure Mathematics* 査読有
- 3 H. Nagoya, A quantization of the sixth Painlevé equation. *Noncommutativity and singularities*, 291--298, *Adv. Stud. Pure Math.*, 55, *Math. Soc. Japan, Tokyo*, 2009. 査読有
- 4 H. Nagoya, Quantization of differential systems with the affine Weyl group symmetries of type  $C_N^{(1)}$ , *Journal of Mathematical Sciences* 15 (2009) 493-519 査読有
- 5 Ramani, H. Nagoya, B. Grammaticos and T. Tamizhmani, Folding transformations for quantum Painlevé equations, *J. Phys. A; Math. Theor.* 42 No 9 (2009) 095211 (9pp) 査読有
- 6 H. Nagoya, Quantum Painlevé equations. *The COE Seminar on Mathematical Sciences 2007*, 99--114, *Sem. Math. Sci.*, 37, *Keio Univ., Yokohama*, 2008. 査読有
- 7 H Nagoya, B Grammaticos and A Ramani, Quantum Painlevé equations: From continuous to discrete, *SIGMA* 4 (2008), 051, 9page 査読有
- 8 H Nagoya, B Grammaticos and A Ramani, Quantum Painlevé equations: from continuous to discrete and back, *Regular and Chaotic Dynamics*, 13 (2008), no. 5, 417-423 査読有
- 9 M. Jimbo, H Nagoya, J. Sun, Remarks on confluent Knizhnik-Zamolodchikov equations for  $sl_2$  and quantum Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* 41 No 17 (2008) 175205 (14pp) 査読有
- 10 H Nagoya, Quantum Painlevé Systems of Type  $A^{(1)}_{n-1}$  with higher degree Lax operators, *Int. J. Math.* 18 (2007), no. 7, 839--868 査読有
- 11 Kakei, S.; Kikuchi, T.: "The sixth Painlevé equation as similarity reduction of  $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$  Drinfel'd-Sokolov hierarchy", *Lett. Math. Phys.* 79 221--234 (2007) 査読有.

[学会発表] (計 9 件)

- 1 K Hasegawa "Quantizing the discrete Painlevé VI equation", *Fusion of Integrable Systems and Geometry*, 17 April, 2009, Tohoku university
- 2 菊地哲也, 変形 Pohlmeier-Lund-Regge 方程式と Painlevé III 型方程式, 日本数学会 2009 年度年会, 東京大学, 2009 年 3 月 29 日
- 3 筧三郎, 菊地哲也, AKNS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式, 研究集会「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」, 京都大学数理解析研究所, 2009 年 2 月 6 日.
- 4 菊地哲也, 変形 Pohlmeier-Lund-Regge 方程式から見た Painlevé III 型方程式, 研究集会「非線形波動の数理と物理」, 九州大学応用力学研究所, 2008 年 11 月 6 日
- 5 名古屋創, Quantization of monodromy preserving deformation with Poincaré rank 2 for  $sl_N$ , 非可換微分幾何学と数理解物理学, 2008 年 9 月 12 日, 於慶應義塾大学日吉キャンパス
- 6 J. Sun, 名古屋創, Confluent KZ equation for  $sl_N$  with Poincaré rank 2, 函数方程式論サマーセミナー, 2008 年 8 月 8 日, 富山県富山市白樺ハイツ
- 7 筧三郎, 菊地哲也, "NLS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式", 日本数学会 2008 年度年会, 近畿大学, 2008 年 3 月 23 日
- 8 菊地哲也, "戸田階層とパンルヴェ方程式", 2007 年度表現論シンポジウム, 香川県坂出市休暇村讃岐五色台, 2007 年 11 月 14 日
- 9 Koji Hasegawa "Quantization of discrete Painlevé equations", *The 3rd Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics*, Kyushu University Hakozaki Campus, 15 September 2007

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kojihas/kojihas-jM.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長谷川 浩司 ( HASEGAWA KOJI )  
東北大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：30208483

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

黒木 玄 ( KUROKI GEN )  
東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：10234593

菊地 哲也 ( KIKUCHI TETSUYA )  
東京大学・大学院数理科学研究科・特任  
研究員

研究者番号：00374900

名古屋 創 ( NAGOYA HAJIME )  
東京大学・大学院数理科学研究科・特任  
研究員

研究者番号：80447367