

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月17日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21340025

研究課題名（和文） 最適化問題の記号代数解法のための実代数幾何の代数計算理論の展開

研究課題名（英文） Developments of computational theory of real algebraic geometry for optimization problem

研究代表者

穴井 宏和（ANAI HIROKAZU）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所

研究者番号：20417520

研究成果の概要（和文）：本研究では、最適化問題を解く方法論として計算実代数幾何に基づく最適化手法である限量記号消去(Quantifier Elimination)に関して、計算効率化のための理論研究とその計算機実験による効果の検証をし、制御理論やものづくりへの応用も行った。さらに、雑誌論文・学会発表だけでなく、QE と最適化に関連する図書も刊行し、非常に多くの研究成果が得られた。

研究成果の概要（英文）：In this project we have developed effective and efficient quantifier elimination algorithms for optimization problems. We had many original results on quantifier elimination algorithms and published them in international academic journals. Moreover, we also published textbooks on quantifier elimination and optimization.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2010年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2011年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2012年度	3,200,000	960,000	4,160,000
総計	13,200,000	3,960,000	17,160,000

研究分野：数学一般(含確率論・統計数学)

科研費の分科・細目：応用数学

キーワード：数式処理、最適化、数値・数式融合計算

1. 研究開始当初の背景

実世界の非常に広範な問題は「最適化問題」として捉えることができる。そのため最適化問題を解く方法論の革新的発展が世の中にもたらすインパクトは非常に大きいと言える。例えば、ものづくりにおいては、数値的最適化手法が欠かせない数学的ツールとなっている。さまざまな設計要求を満足し高い性能・信頼性を備えた製品・システムの開発が強く望まれており、これらの要求を達成

するため、まず実設計の問題を数理的な制約問題として定式化し、次に数値的最適化手法を用いて最適設計の効率化や高精度化を図ることが行われている。

しかし、安全性・環境・低コスト化に対する要求と多様化する顧客ニーズを高度なレベルで満足させるために、年々ものづくり過程が複雑化しており、極めて厳しい高性能化が求められると同時にその一方で開発期間の短縮も強く求められている。これらの要求

にこたえるために、新たな最適化のアプローチを構築し、システムの解析・設計・検証手法と統合していくことが急務となっている。

2. 研究の目的

本研究では、記号・代数計算に基づく最適化・制約問題解消に着目して、その効率的な計算アルゴリズム及びツールの構築を目指す。記号・代数計算に基づく最適化手法によって、従来の数値的最適化手法では困難であった非凸問題の大域的最適解を正確に導くことやパラメトリックに問題を解く(実行可能解を可能領域として求める・最適解をパラメータ付きで求める)「パラメトリック最適化」が可能となるためである。この特長を活かし、新しい代数的な最適化手法を開発し、例えば、ものづくりの設計における新しい効率的な設計法の確立を行う。

3. 研究の方法

不等式系の代数的解法である「限量子消去(Quantifier Elimination: QE)」や方程式系の代数的解法の「グレブナ基底(Groebner bases: GB)」の計算法に基づいた新しい効率的な最適化手法の開発を試みる。

GBとQEは、それぞれ代数幾何及び実代数幾何の理論に基づく代数的アルゴリズムである。本研究では、QEを中心とした実代数幾何の代数計算理論の研究に重点的におき、QEのアルゴリズムを利用した最適化法の開発と高速化を行い、実用的な記号的最適化手法の確立を目指す。

具体的には、以下のテーマを軸として研究を推進する。

(1) 実代数幾何の理論を掘り下げ、効率的な実代数幾何計算アルゴリズムを開発する。

(2) 実際の問題(計算対象)を分析し、問題の構造・特性を利用したアルゴリズムを開発する。

(3) 精度保証付き数値計算と記号・代数計算を融合した効率的計算技術を開発する。

4. 研究成果

(1) QE計算において隘路となる代数拡大体計算にDynamic evaluationを適用した方式に精度保証付き数値計算を融合した手法を提案しその実装を行った(発表③)。

QE計算のもう一つの隘路となる射影段階についても、高速化手法(発表⑨)と大規模多項式行列の行列式の並列高速計算手法を開発した。

代数制約解法に必要な代数構造の分解について、正標数の場合に、有効な準同形写像であるFrobenius写像の逆像計算を利用した手法を構築した(雑誌⑤)。

制御系設計で頻出する最適化の問題クラスに有効なQEアルゴリズムの高速化の鍵と

なる論理式の簡略化手法を開発し高速化を実現した(雑誌⑬)。

また、数学的基礎において、代数的関係を明らかに、等式制約や不等式制約の解法の基盤ツールとなる、多項式イデアル操作(各操作後のイデアルのグレブナー基底計算)の効率化のため、モジュラー技法の改良を行った。既存の方法を統一し、概念を明確化し、イデアル商、イデアルの交わり、根基計算などに、モジュラー技法が計算の正当性を保証しながら効率的に適用できることを示した(発表⑱)。

イデアル剰余類計算の効率化として、イデアルのもつ対称性を有効に利用できる方法を開発した(雑誌⑫)。

(2) 制御理論におけるいくつかの重要な問題に対して代数的手法を導入した新しい方法論を提案し国際会議、国際雑誌で発表した。

具体的には、リカッチ方程式の代数的解法(発表②)、数値数式ハイブリッド最適化によるH2制御での制御器設計法(発表①)、多項式スペクトル分解の代数的手法(雑誌①)などである。

制御理論における非線形システムの非線形ゲイン関数を正確に求めるQEを活用した新しい方法を提案した(発表⑩、雑誌⑧)。

(3) パラメータを含む最適値を数値・数式ハイブリッド計算に基づいて効率的に構成するさまざまな手法を導入し、QEアルゴリズムの大幅な効率化を達成した(発表③⑦)。一連の研究成果は、国際論文誌Theoretical Computer Scienceに採録された(雑誌⑬)。

(4) 上記のQEの計算高速化の成果は、我々が開発中のQEパッケージ「SyNRAC」に実装し、効果を実証した。SyNRACの一部はWebから公開。

(5) 本研究の成果のアウトリーチ活動として、記号的な最適化手法の主要アルゴリズムであるQEについて、これまでの成果を本にまとめ『QEの計算アルゴリズムとその応用—数式処理による最適化』を出版した。

また、QEによる最適化手法を含む各種最適化手法をエンジニアや実務家向けにやさしく解説した教科書『数理最適化の実践ガイド』を出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計13件)

- ① H. Anai, S. Hara, M. Kannno, K. Yokoyama, Parametric polynomial spectral factorization using the sum of roots

- and its application to a control design problem. J. Symb. Comput. 査読有, 44(7): 703-725, 2009
- ② M. Kida, G Renoue, K. Yokoyama. Quintic Polynomials of Hashimoto-Tsunogai, Brumer and Kummer, International Journal of Number Theory, 査読有, Vol. 5, No. 4, 555-571, 2009
- ③ M. Kanno, H. Anai, Computer Algebra for Guaranteed Accuracy. How Does It Help?, Japan J. Indust. Appl. Math. 査読有 Volume 26, Number 2, 517-530, 2009
- ④ M. Kanno, K. Yokoyama, S. Hara, H. Anai, Algebraic Approach to Discrete-time Polynomial Spectral Factorization, Journal of Math-for-Industry, Kyushu University. Vol.1 JMI2009A-8, 査読有, 57-68, 2009
- ⑤ K. Yokoyama, A Note on Distinct Nilpotency Decomposition of Polynomial Ideals over Finite Fields, Commentarii Mathematici, niversitatis Sancti Pauli, Vol. 59, No.2, 査読有 145-164, 2010
- ⑥ 穴井宏和, 数式処理に基づくパラメータ空間法によるロバスト制御系設計「電気評論」, pp15-18, 査読無, 2011年3月号.
- ⑦ S. Gandy, M. Kanno, H. Anai, K. Yokoyama, Optimizing a Particular Real Root of a Polynomial by a Special Cylindrical Algebraic Decomposition, Mathematics in Computer Science, 査読有, 5(2): 209-221, 2011
- ⑧ H. Ichihara, H. Anai, An SOS-QE Approach to Nonlinear Gain Analysis for Polynomial Dynamical Systems, Mathematics in Computer Science, 査読有, 5(3): 303-314, 2011
- ⑨ H. Iwane, H. Yanami, H. Anai, A Symbolic-Numeric Approach to Multi-Objective Optimization in Manufacturing Design. Mathematics in Computer Science, 査読有, 5(3): 315-334, 2011
- ⑩ 相澤 彰子, 松崎 拓也, 穴井 宏和, 自然言語処理と計算代数の接合による数学問題へのアプローチ(〈特集〉ロボットは東大に入れるか?). 人工知能学会誌, 27(5), pp483-491, 2012
- ⑪ 岩根 秀直, 穴井 宏和, 屋並 仁史. 符号情報利用による数値数式 CAD の効率的な実装, (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications, 数理解析研究所講究録 1815, pp143-151, 2012. 10
- ⑫ S. Orange, G. Renault, K. Yokoyama, Efficient Arithmetic in Successive Algebraic Extension Fields Using Symmetries, 査読有, Mathematics in Computer Science, pp217-233, 2012
- ⑬ H. Iwane, H. Yanami, H. Anai, K. Yokoyama, An effective implementation of symbolic-numeric cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. Theoretical Computer Science vol. 479, 43 - 69, 2013
- [学会発表] (計 20 件)
- ① M. Kanno, S. Hara, H. Anai: Plant/Controller Design Integration for H2 Control by Symbolic-Numeric Hybrid Optimization Based on Sum of Roots Characterization. 3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC2009), 2009.7.9
- ② M. Kanno, K. Yokoyama, H. Anai, S. Hara: Solution of Algebraic Riccati Equations Using the Sum of Roots, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) 2009, 2009.7.9
- ③ H. Iwane, H. Yanami, H. Anai, K. Yokoyama: An Effective Implementation of Symbolic-Numeric Cylindrical Algebraic Decomposition for Quantifier Elimination. 3rd International Workshop on Symbolic-Numeric Computation (SNC) 2009.8.4
- ④ H. Anai: A Symbolic-Numeric Approach to Multi-Parametric Programming for Control Design: ICROS-SICE International Joint Conference 2009, 2009.8.20
- ⑤ H. Noriko, H. Anai, S. Hara: A Maple toolbox for parametric robust control system design using symbolic computation, ICROS-SICE international Joint Conference 2009, 2009.8.20
- ⑥ M. Kanno, K. Yokoyama, H. Anai, S. Hara: Solution of Algebraic Riccati Equations Using the Sum of Roots, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) 2009, 2009.7.30
- ⑦ H. Iwane, H. Yanami, H. Anai, K. Yokoyama: An Effective Implementation of Symbolic-Numeric Cylindrical Algebraic Decomposition for Quantifier Elimination. 3rd International Workshop on

- Symbolic-Numeric Computation (SNC) 2009, 2009. 8. 4
- ⑧ H. Anai: A Symbolic-Numeric Approach to Multi-Parametric Programming for Control Design: ICROS-SICE International Joint Conference 2009, 2009. 8. 20
- ⑨ 岩根秀直, 穴井宏和, 屋並仁史: CADにおける i-projection operator 導入による QE の効率化, 日本数式処理学会大会, 2010. 06. 12
- ⑩ H. Anai: Computer Algebra - what does it bring to control system design? SICE Annual Conference 2010, 2010. 08. 19
- ⑪ H. Anai: A symbolic-numeric approach to nonlinear dynamical system analysis. SIAM / MSRI Workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation 2010. 11. 19
- ⑫ 吉良知文, 岩根秀直, 穴井宏和: On parametric optimization techniques for solving recursive formulas, 「不確定環境下での柔構造最適化モデリング」第7回研究会, 2011. 01. 29
- ⑬ 市原裕之, 穴井宏和: 非線形ゲイン解析に対する SOS-QE アプローチ, 第11回計測自動制御学会 制御部門大会, 2011. 01. 28
- ⑭ 梅田裕平, 丸山次人, 志村智洋, 穴井宏和: 代数的簡略化を用いたモデル予測制御の効率的な方法, 第11回計測自動制御学会 制御部門大会, 2011. 01. 28
- ⑮ 穴井宏和, 信号処理への代数幾何的アプローチ, 電子情報通信学会ソサイエティ大会企画セッション, 『信号処理工学の多様性と数理的体系化への挑戦』北海道大学, 2011. 9. 13
- ⑯ 穴井宏和, Computational Real Algebraic Geometry and its Engineering Applications, 日本学術振興会 日本-欧州先端科学セミナー ESF-JSPS Frontier Science Conference for Young Researchers "Mathematics for Innovation: Large and Complex Systems" 2011. 3. 1
- ⑰ 折居茂夫, 穴井宏和, 時間モデルを用いた並列性能予測の誤差を検討する方法, 情報処理学会 第133回ハイパフォーマンスコンピューティング研究発表会 有馬ビューホテルうらら, 2012. 3. 26
- ⑱ 杉町勇和, 岩崎敦, 横尾真, 穴井宏和, オークションメカニズムの多項式表現と限量記号消去法を用いたメカニズム設計の自動化, 日本オペレーション

ズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 2012. 9. 13

- ⑲ K. Yokoyama, Usage of Modular Techniques for Efficient Computation of Ideal Operations, Computer Algebra in Scientific Computing CASC, 2012, 9. 4
- ⑳ 穴井宏和, 代数幾何的アプローチによる多項式システムの解析, 計測自動制御学会 第13回制御部門大会 特別企画 「制御と数学が織り成す産業数学の展開」, アクロス福岡, 2013. 3. 8

〔図書〕(計2件)

- ① 穴井宏和, 横山和弘, 東京大学出版会, **QE** の計算アルゴリズムとその応用—数式処理による最適化、2011年、264
- ② 穴井宏和, 講談社, 数理最適化の実践ガイド、2013年、160

〔その他〕

ホームページ等
SyNRAC ダウンロードページ:
<http://jp.fujitsu.com/group/labs/techinfo/freeware/synrac/>

図書関連ホームページ:

<http://www.utp.or.jp/bd/978-4-13-061406-1.html>
<http://www.kspub.co.jp/book/detail/1565104.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

穴井 宏和 (ANAI HIROKAZU)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号: 20417520

(2) 研究分担者

横山 和弘 (YOKOYAMA KAZUHIRO)
立教大学・理学部・教授
研究者番号: 30333454

(3) 連携研究者

屋並 仁史 (YANAMI HITOSHI)
富士通研究所・ソフトウェア技術研究所・研究員
研究者番号: 70417533
岩根 秀直 (HIDENAO IWANE)
富士通研究所・ソフトウェア技術研究所・研究員
研究者番号: 00470360