

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月30日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540167

研究課題名（和文）代数的局所コホモロジーの代数解析と非孤立特異点の計算複素解析

研究課題名（英文） Algebraic analysis of algebraic local cohomology and computational complex analysis of non-isolated singularities

研究代表者

田島 慎一（TAJIMA SHINICHI）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70155076

研究成果の概要（和文）：代数解析の観点から孤立特異点を持つ超曲面に付随した代数的局所コホモロジー類について研究した。パラメーター付き代数的局所コホモロジー類を構成するアルゴリズムを導出した。対数的ベクトル場とそれに付随するホロノミーD-加群を研究する新たな枠組みを構築した。レゾルベントを解析することで、行列のスペクトル分解を正確に求める効率的なアルゴリズムを導出した。

研究成果の概要（英文）：Algebraic local cohomology classes attached to hypersurface isolated singularities are considered in the context of algebraic analysis. A new algorithm of computing parametric algebraic local cohomology classes is derived. A new framework to study logarithmic vector fields and associated holonomic D-modules is constructed. An efficient algorithm to compute spectral decomposition of square matrices is derived by analyzing resolvent.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：代数解析

## 1. 研究開始当初の背景

複素解析学には、代数解析の観点から研究をおこなうことが最も適切と思われる現象や未解決問題が数多くある。代数解析の理論に基づき、特異点の複素解析的諸性質を研究し未解決問題を解決することが望まれていた。また、大阿久、高山らが展開している計算代数解析の研究成果等により、D-加群を計算機上で扱うことが可能となった。本研究

に着手するにあたり、特異点に対しある種の代数的局所コホモロジー類を対応させるとこれら代数的局所コホモロジー類は特異点のもつ様々な複素解析の性質を反映することが明らかにされていた。また、代数的局所コホモロジーを利用することで特異点論で重要なイデアルのスタンダード基底計算が可能となることが明らかにされていた。これらのことから、代数的局所コホモロジーの概念を積極的に用いることで従来は解決が困

難であった問題を扱う新たな研究手法や研究の枠組みを確立することが望まれていた。

また、行列の最小多項式概念と、有理関数の極における留数を exact に求める計算アルゴリズムを組み合わせることで、行列のスペクトル分解行列や固有ベクトルを exact に求める計算法を導出してあった。これらの計算法を改良していくことで、計算効率のよい計算手法を確立することが求められていた。

## 2. 研究の目的

(1) 代数解析と計算代数に基づくことで、特異点を扱う新たな研究手法を確立し、特異点をもつ複素解析的超曲面の計算複素解析を展開する。計算代数解析の観点から、特異点に付随する代数的局所コホモロジー類のみたすホロノミーD-加群の研究を行う。パラメータ付き代数的局所コホモロジー類を求める計算法を確立し、特異点の変形の研究を進める。特異多様体に沿う対数的ベクトル場と指数定理の研究を行う。

(2) レゾルベントの代数解析を行うことで、正方行列のスペクトル分解や一般固有ベクトル空間を誤差なく正確に求めるための新たな計算法を確立する。さらに、計算アルゴリズムの並列化を行い、計算効率がよく実用性の高い計算手法を構築する。

## 3. 研究の方法

(1) 研究代表者と分担者が協力し、以下の研究を行う。特異点研究用に考案したアルゴリズムを数式処理システムに実装し、それらを用いた計算実験を行い、計算データの分析、解析を通して特異点の解析を行う。

(2) 研究分担者と共同で、固有値問題関連のアルゴリズムの導出、改良、効率化を行う。さらに、アルゴリズムの並列化の研究・開発・数式処理システムへの実装を行う。

## 4. 研究成果

(1) パラメータ付き代数的局所コホモロジーを求めるアルゴリズムを導出し、その応用として孤立特異点の変形に付随するパラメータ付きスタンダード基底をもとめる新たな計算法を確立した。

(2) ミルナー数を一定に保つ semi-quasihomogeneous 孤立特異点変形に対し、その Tjurina stratification を求めるアルゴリズムを導出した。この計算法により、ミルナー数とチュリナ数の差の値が変

形パラメータ依存性を求めることができ、さらに、ヤコビイデアルとチュリナイデアルが定めるパラメータ付きイデアル商をアルゴリズム的に求めることが可能であることを明らかにした。

(3) Unimodal singularity に付随するホロノミーD-加群の構造を決定した。特異点に付随して定義されるある種の代数的局所コホモロジー類の満たす高々1階の偏微分方程式系がなすホロノミーD-加群の特異点における特性多様体の重複度は2となることを得た。また、これら代数的局所コホモロジー類が定める（偏微分作用素の階数に制限を課さない）ホロノミーD-加群は、2階の偏微分作用素により構成することができることを明らかにした。

(4) 代数的局所コホモロジー類を用いることで、孤立特異点に沿う対数的ベクトル場全体のなす集合の構造を決定し、さらに対数的ベクトル場を具体的に構成する方法を導出した。また、対応するホロノミーD-加群の characteristic cycles の構造を明らかにした。

(5) 代数的局所コホモロジー類を用いることで、Pellickaan らによる I-versal deformations で重要な諸量を計算する方法を与えた。

(6) 有理数を成分にもつ正方行列に対し、その基本最小消去多項式を効率的に求める新たな計算アルゴリズムを構成しさらにそのアルゴリズムを並列化した。基本最小消去多項式とレゾルベントの概念を組み合わせ、スペクトル分解行列を効率よく求めるアルゴリズムを導出、実装し、さらに並列化した。基本計算であるベクトル・行列多項式積を求めるホーナー法に改良を加え、行列スペクトル分解行列アルゴリズムを更に効率化した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① S. Tajima and Y. Nakamura, Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, Publication of Research Institute of Mathematical Sciences, 査読有, 48, 2012, 21-43.

② S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 査読有, 56, 2009, 341-361.

③ S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, *Journal of Symbolic Computations*, 査読有, 44, 2009, 435-448

④ S. Tajima and Y. Nakamura, On holonomic D-modules attached to Reiffen's hypersurface singularities, *Journal of Mathematical Sciences*, 査読有, 158, 2009, 288--296

[学会発表] (計57件)

① 小原功任, 田島慎一, Risa/Asir 行列スペクトル分解パッケージの開発, 日本数式処理学会理論分科会&システム分科会合同研究会, 2012年1月22日, 仙台青葉カルチャーセンター (宮城)

② 田島慎一, Torsion 微分形式に関する Zariski の結果と局所コホモロジー, 対数的ベクトル場に関する Hauser-Muller の結果とホロノミーD-加群, 多変数函数論冬セミナー2011, 2011年12月17日, 広島大学

③ 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジー類に対する偏微分方程式系のスタンダード基底計算, *Computer Algebra - The Algorithms, Implementations and the Next Generation*, 2011年12月8日, 京都大学数理解析研究所

④ 小原功任, 田島慎一, 拡張行列ホーナー法と行列スペクトル分解の並列計算, *Computer Algebra - The Algorithms, Implementations and the Next Generation*, 2011年12月8日, 京都大学数理解析研究所

⑤ S. Tajima and Y. Nakamura, Mu-constant deformations, parametric local cohomology and Tjurina numbers, *The 4th Japanese-Australian Workshop on Real and*

*Complex Singularities*, 2011年11月25日, 兵庫教育大学

⑥ 田島慎一, 対数的ベクトル場とホロノミーD-加群 I, II, 日本数学会函数論分科会, 2011年10月1日, 信州大学 (長野)

⑦ 田島慎一, 非孤立特異点の versal I-unfolding と局所コホモロジー, 日本数学会函数論分科会, 2011年10月1日, 信州大学 (長野)

⑧ 小原功任, 田島慎一, 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解の並列算法, 日本数学会函数論分科会, 2011年9月30日, 信州大学 (長野)

⑨ 鍋島克輔, 田島慎一, Semi-quasihomogeneous isolated singularity に付随する代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムについて, 日本数式処理学会大会, 2011年9月10日, 神戸大学 (兵庫)

⑩ S. Tajima, Logarithmic holomorphic vector fields and holonomic D-modules, *The 6th Franco-Japanese Symposium on Singularities*, 2011年9月9日, 九州大学 (福岡)

⑪ K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, *The 6th Franco-Japanese Symposium on Singularities*, 2011年9月7日, 九州大学 (福岡)

⑫ 田島慎一, 小原功任, 照井章, 行列ホーナー法の拡張と効率化, 数式処理の新たな発展, 2011年7月7日, 京都大学数理解析研究所

⑬ 田島慎一, Holomorphic ベクトル場に対する Camacho-Sad-Suwa 指数の計算法, 日本数学会函数論分科会, 2011年3月22日, 早稲田大学

⑭ 田島慎一, 平面曲線の torsion 微分形式と D-加群, 超幾何方程式系研究会, 2011年1月7日, 神戸大学

⑮ 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを利用したスタンダード基底・グレブナ基底計算, 実閉体上の幾何と特異点論への応用, 2010年12月2日, 京都大学数理解析研究所

⑯ 小原功任, 田島慎一, 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化, Computer Algebra, 2010年12月1日, 京都大学数理解析研究所

⑰ S. Tajima, Algebraic analysis of resolvents and its applications to spectral decomposition algorithms, Complex Analysis and its Applications (Joint Sino-Russian Symposium), 2009年10月28日, Belgorod Univ. (Russia)

⑱ S. Tajima,  $\mu$ -constant deformations, algebraic local cohomology classes and Tjurina stratifications, Complex Analysis and its Applications (Joint Sino-Russian Symposium), 2009年10月22日, Moscow Independent Univ. (Russia)

⑲ Y. Nakamura and S. Tajima, Algebraic local cohomologies and b-functions attached to semiquasihomogeneous isolated singularities, Fifth Franco-Japanese Symposium on Singularities, 2009年8月25日, Strasbourg (France)

小原 功任 (OHARA KATSUYOSHI)  
金沢大学・数物科学系・准教授  
研究者番号: 00313635

松井 優 (MATSUI YUTAKA)  
近畿大学・理工学部・講師  
研究者番号: 10510026

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田島 慎一 (TAJIMA SHINICHI)  
筑波大学・数理物質系・教授  
研究者番号: 70155076

### (2) 研究分担者

中村 弥生 (NAKAMURA YAYOI)  
近畿大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 60388494