様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：３４４１９
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０２１０
研究課題名（和文）インスタントン解の漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis of instanton-type solutions

研究代表者
青木　貴史（AOKI, Takashi）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：８０１５９２８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,200,000円、（間接経費）　960,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では大きなパラメータを持つ微分方程式の解の大域的性質の解析を完全WKB解析の立場から行った。本研究で得られた成果は大きく分けて三つ挙げられる．まず、パンルヴェ階層の高次方程式の形式的一般解である指数漸近級数解（インスタントン解）の構成を行った．また，大きなパラメータをもつ超幾何微分方程式のストークス曲線の位相的形状を方程式のパラメータの条件により分類した．さらに超幾何微分方程式に対してヴォロス係数の決定を行い，それらがボレル総和可能でありボレル和の具体形が求まることを示した．これにより超幾何微分方程式のWKB解に対してパラメータに関するストークス現象が記述可能となった．

研究成果の概要（英文）：In this research, we have investigated the global properties of solutions to differential equations with a large parameter from the view point of the exact WKB analysis. There are three main results. Firstly, we have constructed the exponential-asymptotic (instanton-type) solutions, namely general formal solutions, to the equations which belong to the first Painleve hierarchies. Secondly, we have classified the topological types of the Stokes curves of the Gauss equation in terms of the parameters of the equation. Thirdly we have defined and computed explicit forms of the Voros coefficients of Gauss equation with a large parameter and obtained the Borel sums go them. We have obtained the formulas that describe parametric Stokes phenomena of WKB solutions.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： インスタントン解　WKB解　パンルヴェ階層　超幾何微分方程式　ヴォロス係数　ストークス現象　擬微分作用素　核関数

１．研究開始当初の背景

本研究はヴォロスにより提唱された微分方程式の解析方法である完全 WKB 解析を基盤としている．完全 WKB 解析では，プランク定数を小さなパラメータ（またはその逆数を大きなパラメータ）と見なし，その形式的冪級数として表される特別な解を解析的な解の「ラベル付け」として活用する．形式的な解は発散を伴うが，1 次元定常的シュレディンガー方程式については容易に構成され，それはボレル総和法を介して解析的な解と結び付く．従って解析的解の研究は形式解と解析解のボレル和による対応の切り替わりの研究に帰着される．このような立場からヴォロスは 4 次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式を詳細に調べた．これと前後して J. エカールの再生関数の理論が現れ，形式解の再生性が指摘されたが，これについては現在でも完全に一般的な証明が得られている訳ではない．この後，ファムらにより完全 WKB 解析は活発に研究された．90 年に佐藤幹夫，河合隆裕，竹井義次と申請者・青木の共同研究により，この方法は 2 階フックス型線型常微分方程式に応用され一般的条件のもとにモノドロミー行列を計算することに成功した．続いて，河合・竹井・青木は高階（3 階以上）の線型常微分方程式の完全 WKB 解析を試み，変わり点の近傍における局所理論の確立に成功した．さらには「仮想変わり点」の概念を導入しバークたちが 1982 年に発見した「新しいストークス曲線」の「発生源」を突きとめた．高階の線型常微分方程式の大域的漸近解析は単独の場合でも多くの困難を伴い，未だに十分研究が進んでいるとは言い難い．しかし，少なくとも局所理論に関してはある程度のことが分かっている．青木・河合・小池・竹井は無限階の場合を含めた極めて一般的な形で形式解の構成が与えられ，さらに単純変わり点の近傍での標準形がエアリ方程式になることが証明された．この意味で単純変わり点での局所理論は完成している．これらの議論は後にで擬微分方程式に拡張された．完全 WKB 解析の有効性は非線型微分方程式でも示されている．パンルヴェ方程式に対して河合・竹井による完全 WKB 解の局所理論，青木・河合・竹井によるインスタントン解の構成，竹井による接続係数の計算等はパンルヴェ超越関数の解析に新たな切り口を与えた．この方向での研究は最近ではパンルヴェ階層に属する非線型微分方程式の解析に向かっており河合・竹井の努力により第 1 種と呼ばれる変わり点近傍での局所理論は大きく進んでいる．青木・本多は野海・山田系やパンルヴェ IV 階層の方程式系の形式解の主部の存在を証明し，同時に 0 パラメータ解と呼ばれる形式解（完全 WKB 解）の存在を示した．当研究はこれらの研究を背景としている．

２．研究の目的

本研究では以下の目標を設定した：

(1) 非線型微分方程式系のインスタントン解構成

(2) インスタントン解の総和可能性の証明

(3) 解析的解とインスタントン解の関係の解明

申請段階では大きなパラメータを持つ古典的パンルヴェ方程式（以下，対象とする微分方程式はすべて大きなパラメータを含むものを考える）および第 1 パンルヴェ階層に属する幾つかの方程式についてインスタントン解が構成されていた．原理的にはハミルトン系で記述できる系について構成が可能であることは竹井により示されていたが，実際の構成は煩雑であり，ある程度具体的な情報を得たいときには個別の考察が必要となる．(1) では具体計算に有利な多重スケール解析の方法を用いて，より一般的な系についてインスタントン解構成を目標とした．(2) では，このようにして得られたインスタントン解がボレル総和可能性かどうか検証することを目標とした．大きなパラメータの逆べきで展開される解（いわゆる零パラメータ解）のボレル総和可能性に関しては，最近の小池等の研究により研究が進みつつあるが，インスタントン解については，大きなパラメータを持たない場合の類似物としてコスティンらにより多少はなされているものの，任意定数が 1 つの場合に限定されており，一般的形式解についての研究はまったく無い．(3) ではインスタントン解から解析的解の情報，例えば漸近挙動や極の位置等をいかに得るかの研究を目標とした．

３．研究の方法

非線型微分方程式系のインスタントン解構成については多重スケール解析の方法を用いた．既存の多重スケール解析は単独 2 階方程式が主な対象であり，本研究目標の一つに据えた 1 型パンルヴェ階層の方程式のような複雑な非線型連立微分方程式系に対しては適用できない．従って多重スケー

ル解析を一般化することが本研究を遂行する上で必要不可欠であった．この一般化に際して生じた最大の困難は，高次の摂動項を計算する際に現れる積構造の処理である．初項の計算に関連して現れた行列の固有ベクトルの成分の積が高次項を決定する方程式の非斉次項に現れ，その構造は極めて複雑となる．この問題は，固有ベクトルの成分の積から構成されるベクトルが，簡潔な構造を持つことを利用して解決できた．得られたインスタントン解のボレル総和可能性の研究は未だ道半ばであるが，トイモデルとして線型方程式に付随するリッカチ方程式のインスタントン解を研究する方法を選んだ．線形方程式の場合，WKB 解のボレル総和可能性は証明されているので，その対数微分として得られるインスタントン解はボレル総和可能であると予想される．しかしながらインスタントン解から如何にボレル和を定めるかについての議論が必要となる．本研究では，線形方程式の中で古典的にはよく知られており，WKB 解のボレル変換の構造がある程度複雑なガウスの超幾何微分方程式をモデルとして選び，方程式に含まれるパラメータが変化したときのストークス現象を研究するという方法を採った．

４．研究成果

(1) １型パンルヴェ階層の方程式のインスタントン解構成

考察した方程式は１型パンルヴェ階層に属する一般次の方程式

$$\begin{cases} \eta^{-1}\dfrac{du_j}{dt} &= 2v_j, \\ \eta^{-1}\dfrac{dv_j}{dt} &= 2(u_{j+1}+u_1u_j+w_j) \end{cases}$$

$(j=1,2,\dots,m)$ である．ここで u_j, v_j は独立変数 t の未知関数であり，$u_{m+1}=0$ とする．η は大きなパラメータであり，w_j は

$$\begin{aligned} w_j :=& \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j} u_k u_{j+1-k} + \sum_{k=1}^{j-1} u_k w_{j-k} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1} v_k v_{j-k} + c_j + \delta_{jm} t \end{aligned}$$

で与えられる．c_j は定数であり，δ_{jm} はクロネッカーの記号である．この方程式系に対してインスタントン解を構成した．インスタントン解は $2m$ 個の任意定数を持つ形式的一般解である．この具体形は略す（「主な発表論文」[2] 参照）が，指数関数項の無限和の形で与えられ，フーリエ級数と類似した表示を持っている．上の方程式のストークス現象を記述する際に重要な役割を果たすことが期待される．

(2) 超幾何微分方程式のストークス曲線の形状の分類

ガウスの超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + (c-(a+b+1)x)\frac{dw}{dx} - abw = 0$$

に大きなパラメータ η を $a=1/2+\eta\alpha$, $b=1/2+\eta\beta$, $\gamma=1+\eta\gamma$ として導入した方程式のストークス曲線の形状をパラメータ α, β, γ により分類した．既存の理論ではストークス曲線が特異点に流れ込む本数を並べた位数列により位相幾何的な分類は成されていたが，パラメータにいかなる条件を課せば位相的な形状と対応付けできるか，という問に初めて答えたという意義を持つ．

(3) 超幾何微分方程式のヴォロス係数の決定

大きなパラメータを導入したガウス方程式に対してヴォロス係数を定義し，その具体形を求めた．ヴォロス係数とは，異なった正規化条件により定義された WKB 解の関係を記述する量であり，パラメータに関するストークス現象を研究する際に重要な役割を果たす．ヴォロス係数の具体形の一例を挙げると以下のようになる．

$$\begin{aligned} V_0 =& \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n\eta^{1-n}}{n(n-1)}\biggl\{(1-2^{1-n})\biggl(\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\frac{1}{\beta^{n-1}} \\ &+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^{n-1}}+\frac{1}{(\gamma-\beta)^{n-1}}\biggr)+\frac{2}{\gamma^{n-1}}\biggr\} \end{aligned}$$

これは発散級数であるが，ボレル和を考察することにより，パラメータに関するストークス現象が完全に記述できる．このことから WKB 解のパラメータに関するストークス現象が解明できるという意義を持つ．

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１２件）

① S. Izumi, Spaces of polynomial functions of bounded degrees on an embedded manifold and their duals, 査読有 The Annales Polonici Mathematici に掲載決定

② T. Aoki, N. Honda and Y. Umeta On a construction of general formal solutions for equations of the first Painlevé hierarchy I, 査読有 Advances in Mathematics, **235** (2013),

496–524, DOI:http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2012.12.011

③ T. Aoki, M. Tanda, Characterization of Stokes graphs and Voros coefficients of hypergeometric differential equations with a large parameter, 査読有 RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B40** (2013), 147–162, DOI:http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/B40-contents.pdf

④ T. Aoki, N. Honda, Y. Umeta, On the number of the turning points of the second kind of the Noumi-Yamada systems with a large parameter, 査読有 RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B37** (2013), 1–30, DOI:http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/B37-contents.pdf

⑤ K. Fuji, K. Inoue, K. Shinomiya, T. Suzuki, Higher order Painlevé system of type $D^{(1)}_{2n+2}$ and monodromy preserving deformation, 査読有 J. Nonlinear Math. Phys. **20** (2013) 57-69, DOI: 10.1080/14029251.2013.862434

⑥ T. Suzuki, A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A, 査読有 AMS Contemp. Math. 593(2013) 125-141, DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/593

⑦ S. Tajima, Y. Nakamura, Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, 査読有 Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), no. 1, 21–43, DOI: 10.2977/PRIMS/59

⑧ T. Aoki, N. Honda, Geometric properties of the Riemann surfaces associated with the Noumi-Yamada systems with a large parameter, 査読有 J. Math. Soc. Japan, **63** (2011), 1085–1119, DOI:10.2969/jmsj/06341085

⑨ Y. Matsui, K. Takeuchi, Monodromy at infinity, Newton polyhedral and constructible sheaves, 査読有 Mathematische Zeitschrift, **268**(2011), 409–439, DOI:10.1007/s00209-010-0678-5

〔学会発表〕（計１５件）

① 鈴木貴雄, 高階パンルヴェ方程式とリジッド方程式, 超幾何函数, 日本数学会年会・無限可積分系セッション特別講演 2014 年 3 月 18 日 学習院大学

② 青木貴史, 積分表示と WKB 解, 研究集会「代数解析と局所凸空間」, 2014 年 2 月 18 日, 日本大学理工学部

③ 青木貴史, Voros coefficients of confluent hypergeometric differential equations with a large parameter, 研究集会「代数解析学の諸問題」, 2013 年 11 月 29 日, 千葉大学

④ T. Aoki, Exact WKB analysis of confluent hypergeometric equations, RIMS Symposium on Exponential analysis of differential equations and related topics, October 16, 2013, RIMS, Kyoto University

⑤ 青木貴史, 反田美香, Gauss の超幾何微分方程式の Voros 係数の全 Stokes 領域における Borel 和, 日本数学会 2013 年秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学

⑥ T. Aoki, Exact WKB analysis of confluent hypergeometric differential equations with a large parameter, Workshop “Several aspects of algebraic analysis – D-modules, singularity theory and computational algebra – ”, March 15, 2013, Nihon University

⑦ T. Aoki, N. Honda, S. Yamazaki, Kernel functions and symbols of pseudodifferential operators of infinite order with an apparent parameter, RIMS Symposium on Recent development of microlocal analysis and asymptotic analysis, October 26, 2012, RIMS, Kyoto University

⑧ 青木貴史, 反田美香, 超幾何微分方程式の Voros 係数の Borel 和とパラメトリック Stokes 現象, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学

６．研究組織

(1) 研究代表者

青木　貴史　（AOKI, Takashi）
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：８０１５９２８５

(2) 研究分担者

鈴木　貴雄（SUZUKI, Takao）
近畿大学・理工学部・講師
研究者番号：６０５２７２０８

泉　脩藏 (IZUMI, Shuzo)
近畿大学・理工学部・研究員
研究者番号：８００２５４１０

松井　優 (MATSUI, Yutaka)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：１０５１００２６

中村　弥生 (NAKAMURA, Yayoi)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：６０３８８４９４

(3) 連携研究者

本多　尚文（HONDA, Naofumi）
北海道大学大学院・理学系研究院・准教授
研究者番号：００２３８８１７

河合　隆裕 (KAWAI, Takahiro)
京都大学・数理解析研究所・名誉教授
研究者番号：２２０２７３７９

竹井　義次 (TAKEI, Yoshitsugu)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：００２１２０１９

小池　達也 (KOIKE, Tatsuya)
神戸大学大学院・理学研究科・准教授
研究者番号：８０３２４５９９