様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 １８ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2011～2014
課題番号：２３３４００３５

研究課題名（和文）拡散方程式における形状解析と漸近解析における新展開

研究課題名（英文）Geometric properties and asymptotic behavior of solutions of diffusion equations

研究代表者
石毛　和弘（Ishige, Kazuhiro）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０２７２０２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　13,600,000円

研究成果の概要（和文）：放物型方程式の解の漸近解析及び形状解析の議論を発展させ、ポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動を分類し、また、その応用として、対応する熱半群のルベーグ空間における減衰の最適評価を求めた。また、積分核の定数倍のように振舞う非線形放物型方程式の解の高次漸近展開理論の構築を行った。さらに、爆発時間直前の解の形状を調べることによって、半線形熱方程式の爆発集合の位置に研究を行い、特に、解が境界で爆発しないための新しい十分条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：We developed the method for studying geometric properties and asymptotic behavior of solutions of parabolic equations, and obtained the asymptotic behavior of hot spots and the optimal decay rates of the Lebesgue norms for the heat equation with a potential. Furthermore, we established a method of obtaining the higher order asymptotic expansions of the solutions behaving like the heat kernel. In addition, we study the location of the blow-up set for a semilinear heat equation by the profile of the solution just before the blow-up time. In particular, we gave a sufficient condition for no boundary blow-up.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：放物型方程式　形状解析　漸近解析　爆発集合　放物型凸　最大点挙動　動的境界条件

1. 研究開始当初の背景
拡散方程式の解の形状を調べるに際し、解の最大点の位置は最も基本的な情報の一つを与えると考え、石毛は 2003 年頃から線形熱方程式の解の最大点挙動を研究し始めた。さらに、2008 年頃から壁谷喜継氏(大阪府立大)ともに、正のポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動にポテンシャル項がどのように影響を及ぼすのか研究を行った。結果として、 解の最大点挙動には正値調和関数の形状が鍵になっていることを明らかにした。この研究にはコンパクト性の欠如から派生する困難点のため従来の漸近解析の手法は不十分であるが、我々の研究では、球対称函数を用いた級数で解を表し、その球対称性を用いて解の微分を含めた詳細な漸近解析を行った。 この新しい漸近解析の手法は解の形状解析からの必要性によって為されたものであり、これが本研究課題の着想の鍵になった。しかしながら、解の最大点挙動の研究という観点からは、ポテンシャル項の符号が負の場合等、より複雑な場合の解析は行われておらず、分類を完成するにはほど遠い。
　また、非線形拡散方程式における中心的研究対象の一つである爆発問題は国内外を問わず多くの研究が為されているが、解の爆発集合の位置の研究は基本的な問題ながら非常に困難な問題である．石毛は溝口紀子氏(学芸大学)、柳下浩紀氏(現 京都産業大学)らとの共同研究、石毛の指導学生藤嶋陽平氏(現 静岡大学)との共同研究から、爆発する直前の解の最大点が爆発集合の位置を決定することを明らかにした。 このためには、非線形拡散方程式の爆発問題における解の形状解析が重要であり、それを可能にする漸近解析が必要であった。
　この他、石渡通徳氏、川上竜樹氏らとの共同研究による符号変化を伴う非線形拡散方程式の解の漸近解析の発展もあったが、漸近解析の進展の必要性は、上記問題に限ったことではなく、線形、非線形を問わず、多くの問題で待たれていた。

２．研究の目的
(1) 線形拡散方程式の解の形状について：
ポテンシャル項付き線形拡散方程式に代表される拡散方程式の解の形状について研究する。ここでポテンシャルの符号が重要であるが、今まで研究を行っていた場合とは異なる場合について解析を行う。特に、解の微分等に関する詳細な漸近解析を行い、解の最大点が有界に留まるならばその極限、無限に発散するならばその発散する速さと方向、最大点の個数、さらに解の等高面の形状について考察する。

(2) 時間大域解の高次漸近展開：
石渡通徳氏、川上竜樹氏らとの共同研究により開発した解のモーメントに着目した解の漸近解析は熱核と同様に振る舞う解の高次漸近形に多くの情報を与える。
　本研究課題では、その解析手法を発展させ、より詳細な高次の漸近展開が可能であると考えており、それによって解の最大点や等高面などの形状を明らかにし，非線形項の影響が解の形状にどのように影響するのか研究を行う。

(3) 爆発集合の位置の特徴付け：
半線形拡散方程式の爆発集合、特に拡散係数が十分大きい場合および十分小さい場合の爆発集合の位置について解析し、解挙動と爆発集合の関係を解明する。例えば、全空間において、拡散係数が十分大きいならば、適当な問題設定の上で、熱方程式の最大点挙動からの類推により、初期値の重心の近くでのみ解は爆発することを証明する。

(4) 解の凸性：
非線形放物型方程式の解の凸性について、Paolo Salani 氏（フィレンツェ大学、イタリア）と共に研究を行う。既存の結果の多くは、時間変数を固定し、空間変数について解の凸性を議論することがほとんどであったが、本研究では、時間空間両変数に関する解の凸性を中心に研究を行う。

３．研究の方法
詳細な漸近解析に基づいた熱方程式に代表される線形拡散方程式の解の最大点挙動や解の等高面の凸性等の解の形状解析、非線形拡散方程式の時間大域解の高次漸近展開等の研究を行う。また、それらの結果に様々な非線形問題の結果を融合させ、半線形拡散方程式の爆発問題等、様々な研究に応用する。
　その一方、楕円型・放物型方程式に関する研究集会およびイタリアの解の凸性に関する研究グループとの国際研究集会を始めとした幾つかの研究集会を共催し、国内外の研究者との意見交換や情報収集を行い、また国内外の研究集会での成果発表を通して、解の形状解析に関する今後の展開を模索する。

４．研究成果
(1) 放物型方程式の解の最大点挙動：
壁谷喜継氏（大阪府立大）とポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動について研究を行い、特に、ポテンシャルの減衰が早い場合及びポテンシャルの符号が負である場合について研究を行った。壁谷氏との以前の共同研究では、ポテンシャルの符号が正であったが、この場合、解の最大点は無限遠点に向かって発散する。ポテンシャルの減衰が早い場合、ポテンシャルの符号が正であれば、解は同じように無限遠点に向かって発散するが、その発散する早さは、ポテンシャルの減衰率に強く影響する。また、ポテンシャルが負である場合は、当研究において重要な情報を与える正値調和関数の構造及び振舞い

の研究からやり直し、解の最大点が有界領域内を動き、さらにその収束先について研究を行った。これにより、大まかであるが、ポテンシャル項の挙動と解の最大点の挙動の分類が為されたことになった。

さらに、柳田英二氏(東京工業大学)、猪奥倫左氏（愛媛大学）と共に、ポテンシャル項付き熱方程式の解のルベーグ空間における減衰評価について研究を行った。この研究は、再配置理論、接合漸近展開による優解に、放物型方程式の解の最大点挙動に培った解析技法を合わせて行われ、ポテンシャルが単調に減衰するという仮定があるものの、最適な減衰評価を得ることに成功した。この結果は、1991 年の Davies と Simon による減衰評価を大幅に改良するものであるが、ここでも、正値調和関数が重要な役割を果したことは興味深い。

(2) 放物型方程式の解の凸性：
非線形放物型方程式の解の時空間変数に関する凸性について、以下のことについて研究を行った。

（ア）放物型凸という概念の導入：1996 年に C. Borell 氏によって導入された放物型凸集合という概念から着想を得て、放物型冪凸や放物型準凸という概念を導入した。
（イ）（ア）に基づき、凸領域から凸領域を除いて得られる凸環状領域において、適当な境界条件及び初期値が恒等的に零である仮定の下、ある非線形放物型方程式の解が放物型準凸性を持つことを証明した。
（ウ）初期条件、境界条件が零という仮定の下、ある非線形性をもつ非斉次項付き熱方程式を考え、その解が放物型冪凸性を有することを証明した。この結果は、1985 年の Kennington による非線形楕円型方程式の解の冪凸性に対する結果の放物型版とみなすことができるものである。また、この結果は、解の積分量に関する時間変数の凸性も導く。
（エ）全空間の熱方程式の解は、初期関数にどのような強い凸性を仮定したとしても、解は時間の経過に伴い、(空間変数に関して)対数凸性よりも強い凸性は有しない。しかし、本研究では、適当に初期関数に凸性を課すと、その解の時間積分は対数凸性よりも強い凸性を持つことを示した。この研究は、解の時間積分として与えられる関数に(ウ)での議論を適用することによって与えられる。

上で述べた放物型凸性の議論は、我々の共同研究によって初めて導入された概念であるが、（イ）（ウ）（エ）においてその有効性が示されたと考えている。

(3) 非線形熱方程式の解の高次漸近展開：
半線形熱方程式の時間大域解の挙動は一般に複雑であるが、初期値が十分に小さい場合等の仮定の下では、熱核の定数倍のように振舞う。本研究では、この熱核の定数倍のように振舞う解の高次漸近展開について、川上竜樹氏（大阪府立大）と共に研究を行った。特に、線形項の影響に決まる解挙動の部分の漸近展開は、我々の既存の結果を精密化し高次漸近解析を行った。さらに、解挙動の非線形項に強い影響を受ける部分については、熱核の定数倍のように振舞う第一近似形を利用し、新たな近似形を求め、さらにそれらを繰り返すことのよって高次漸近形を求める手法を確立した。さらに、この解析を発展させ、微分を非線形にもつ場合にも応用可能とし、非線形移流項付き熱方程式の高次漸近解析も行った。

また、指導学生であった小林加奈子氏を加え、分数冪ラプラス作用素や多重ラプラス作用素をもつ非線形放物型方程式の解の高次漸近展開を行った。この研究により、熱方程式の解の漸近解析の技法も改良され、より精密な解析が可能になった。

この他、吸収項熱方程式に対して、常微分方程式の解が第一次漸近形である場合に、2次漸近形に熱方程式の解が現れることを発見し、その高次漸近展開を、小林加奈子氏と共に求めることに成功した。

(4) 半線形熱方程式の爆発問題：
半線形熱方程式の爆発問題を指導学生であった藤嶋陽平氏（現 静岡大学）と共に、爆発集合の位置について研究を行った。爆発集合の研究においては、非線形性の強さを表す指数に対して Sobolev の不等式に起因するある制限を加え、さらに領域に凸性などの条件を仮定して研究することが多い。しかし、本研究では解の爆発する早さに制限をつけるものの、非線形性の強さや凸性などの領域の形状に関する仮定を行わない。我々の解析手法は、2000 年初頭における柳下氏に解析手法を発展・改良させた 2010 年の藤嶋・石毛の結果に基づき行われ、以下の結果を得た。

（ア）正定数に積分量は正の摂動を加えた初期値を考え、拡散係数が大きくなるにつれ、短時間における解の挙動において熱方程式が支配的になり、爆発集合は初期値の重心に近づく。

（イ）（ア）と異なり、正定数に積分量が零または負の摂動を加え、拡散係数を大きくして行くと、爆発集合がどのように振舞うか研究を行った。（ア）の場合、初期値の重心は対応する熱方程式の解の最大点の時間無限大の極限として捉えることができるが、この意味において同様の結果が証明できる。つまり、拡散係数が増大するにつれ、爆発集合は無限遠点

に近づくが、その方向、早さは対応する熱方程式の最大点挙動に強い相関を持つ。

（ウ）境界爆発が起こらないための十分条件について研究を行った。境界爆発は有界凸領域の場合には起こらないことが 1985 年 Friedman 及び McLeod らによって証明されているが、非凸領域の場合は多くが解明されていなかった。本研究では、解が対応する常微分方程式のような爆発をする場合を ODE 型爆発と定義し、ODE 型爆発の場合は、領域の凸性であるかどうかに関わらず、解は境界で爆発しないことを示した。また、ODE 型爆発が起こる十分条件についても研究を行った。この応用として、長い間、未解決であった円環領域における球対称解が境界で爆発するかどうかという問いに対して否定的な解決を与えることができた。

これらの解析は、爆発時刻直前での解の形状を詳しく調べ、放物型リゥービル型定理等を適宜応用し、爆発問題において開発されてきた非線形解析の技法を合わせることによって為された。

(5) 動的境界条件付き半線形楕円型方程式：半空間における動的境界条件付き楕円型方程式の時間大域解の存在および非存在について、Marek Fila 氏（コメニウス大学、スロバキア）および川上竜樹氏（大阪府立大学）と共同研究を行った。半空間における動的境界条件付き楕円型方程式では、解をどのように定義するのか、というところから研究を始めなければならない。本研究では、一度、２つの未知関数からなるシステムの解と理解し、ポアソン核および半空間における零ディリクレ条件の下でのラプラス作用素のグリーン関数を用いて、解のみたすべき積分方程式を発見し、それを用いて解を定義することにした。この解の定義を用いて、以下の研究成果を挙げた。

（ア）時間大域解が存在するための非線形項の指数を同定し、ある臨界指数の存在を明らかにした。
（イ）(i)で時間大域解の存在が証明できる非線形性の強さの範囲において、初期関数が十分小さい場合に解は時間無限大でポアソン核の定数倍のように振舞うことを示した。

(ア)で得た臨界指数は、非線形楕円型方程式の解の正則性に関連する Brezis-Turner 指数や半空間における非線形楕円型方程式の正値解の非存在に関連する臨界指数と同じ値となっている。
(ア)の解析には、積分方程式に基づき、半線形熱方程式における藤田臨界指数を求める解析手法が有効であり、ポアソン核から得られる解の減衰評価を用いて非線形項の減衰評価を逐次的に求め、背理法によって時間大域解の非存在を証明した。（イ）においては、解の自己相似不変なルベーグ空間を念頭に置きながら、積分解に付随する様々な評価を求めながら、解の先験的評価、時間局所解の存在、時間大域解の存在という順に証明を行った。ここでは、詳細な積分核の評価に基づき、積分領域の分割を多用するが必要があった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２２件）

① Kazuhiro Ishige、Tatuski Kawakami、Kanako Kobayashi、Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel、 J. Evol. Equ.、査読有、Vol. 14、2014、749-777
DOI：10.1007/s00028-014-0237-3

② Kazuhiro Ishige、Paolo Salani、A note on parabolic power concavity、Kodai Math. J.、査読有、Vol. 37、2014、668-679
DOI：10.2996/kmj/1414674615

③ Yohei Fujishima、Kazuhiro Ishige、Blow-up set for type I blowing up solutions for a semilinear heat equation、Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire、査読有、Vol. 31、2014、231-247
DOI：10.1016/j.anihpc.2013.03.001

④ Kazuhiro Ishige、Tatuski Kawakami、Kanako Kobayashi、Global solutions for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel、Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S、査読、Vol. 7、2014、767-783
DOI：10.3934/dcdss.2014.7.767

⑤ Kazuhiro Ishige、Paolo Salani、Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems、Math. Ann.、査読有、Vol. 358、2014、1091-1117
DOI：10.1007/s00208-013-0991-5

⑥ Marek Fila、Kazuhiro Ishige、Tatsuki Kawakami、Large time behavior of the solution for a two dimensional semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、Asymptot. Anal.、査読有、Vol. 85、2013、107-123
DOI：10.3233/ASY-131183

⑦ Kazuhiro Ishige、Tatsuki Kawakami、

Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations、J. Anal. Math.、査読有、Vol. 121、2013、317－351
DOI：10.1007/s11854-013-0038-6

⑧ Norisuke Ioku, Kazuhiro Ishige、Eiji Yanagida、Sharp decay estimates of L^q norms of nonnegative Schrödinger heat semigroups、J. Funct. Anal.、査読有、Vol. 264、2013、2764-2783
DOI：10.1016/j.jfa.2013.03.009

⑨ Daniele Andreucci、Kazuhiro Ishige、Local quasi-concavity of the solutions of the heat equation with a nonnegative potential、Ann. Mat. Pura Appl.、査読有、Vol. 192、2013、329-348
DOI：10.1007/s10231-011-0226-x

⑩ Kazuhiro Ishige、Kanako Kobayashi、Convection-diffusion equation with absorption and non-decaying initial data、J. Differential Equations、査読有、Vol. 254、2013、1247-1268
DOI：10.1016/j.jde.2012.10.014

⑪ Marek Fila、Kazuhiro Ishige、Tatsuki Kawakami、Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、Adv. Differential Equations、査読有、Vol. 18、2013、69-100
URL:http://projecteuclid.org/euclid.ade/1355867482

⑫ Yohei Fujishima、Kazuhiro Ishige、Blow-up set for a semilinear heat equation and pointedness of the initial data、Indiana Univ. Math. J.、査読有、Vol. 61、2012、627-663
DOI：10.1512/iumj.2012.61.4596

⑬ Kazuhiro Ishige、Michinori Ishiwata、Heat equation with a singular potential on the boundary and the Kato inequality、J. Anal. Math.、査読有、Vol. 118 巻、2012、161-176
DOI：10.1007/s11854-012-0032-4

⑭ Kazuhiro Ishige、Tatsuki Kawakami、Refined asymptotic profiles for a semilinear heat equation、Math. Ann.、査読有、Vol. 353、2012、161-192
DOI：10.1007/s00208-011-0677-9

⑮ Kazuhiro Ishige、Yoshotsugu Kabeya、Lp norms of nonnegative Schrödinger heat semigroup and the large time behavior of hot spots、J. Funct. Anal.、査読有、Vol. 262、2012、2695-2733
DOI：10.1016/j.jfa.2011.12.024

⑯ Marek Fila、Kazuhiro Ishige、Tatsuki Kawakami、Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition、Commun. Pure Appl. Anal.、査読有、Vol. 11、2012、1285-1301
DOI：10.3934/cpaa.2012.11.1285

⑰ Yohei Fujishima、Kazuhiro Ishige、Blow-up for a semilinear parabolic equation with large diffusion on R^N. II、J. Differential Equations、査読有、Vol. 252、2012、1835--1861
DOI：10.1016/j.jde.2011.08.040

⑱ Kazuhiro Ishige、Michinori Ishiwata、Global solutions for a semilinear heat equation in the exterior domain of a compact set、Discrete Contin. Dyn. Syst.、査読有、Vol. 32、2012、847-865
DOI：10.3934/dcds.2012.32.847

⑲ Kazuhiro Ishige、Juha Kinnunen、Initial trace for a doubly nonlinear parabolic equation、J. Evol. Equ.、査読有、Vol. 11、2011、943-957
DOI：10.1007/s00028-011-0119-x

⑳ Yohei Fujishima、Kazuhiro Ishige、Blow-up for a semilinear parabolic equation with large diffusion on R^N、J. Differential Equations、査読有、Vol. 250、2011、2508-2543
DOI：10.1016/j.jde.2010.12.008

㉑ Kazuhiro Ishige、Paolo Salani、On a new kind of convexity for solutions of parabolic problems、Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S、査読有、Vol. 4、2011、851-864
DOI：10.3934/dcdss.2011.4.851

㉒ Kazuhiro Ishige、Yoshitsugu Kabeya、Hot spots for the two dimensional heat equation with a rapidly decaying negative potential、Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S、査読有、Vol. 4、2011、833-849
DOI：10.3934/dcdss.2011.4.833

〔学会発表〕（計　７件）
① 石毛　和弘、放物型方程式の解の凸性について、日本数学会解析学賞受賞特別講演、2015、３月２３日、明治大学
② Kazuhiro Ishige、Heat equation with a nonlinear boundary condition and uniformly local L^r spaces、6th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2014、９月４日、東京工業大学

③ Kazuhiro Ishige、Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems、Minisymposium ``Qualitative Theory of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations", Equadiff 2013、2013、8 月 26 日、Charles University, Prague
④ Kazuhiro Ishige、Sharp decay estimates of L^q-norms for nonnegative Schrödinger heat semigroups,、9th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations、2013、7 月 2 日、Orland (Florida, USA)
⑤ 石毛　和弘、半線形熱方程式の type I 爆発解と爆発集合、2012、11 月 28 日、京都大学理学部数学科談話会

⑥ Kazuhiro Ishige、L^p norms of nonnegative Schrödinger heat semigroup and the large time behavior of hot spots、Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations、The 4th MSJ-SI、2011、9 月 12 日、九州大学
⑦ Kazuhiro Ishige、L^p norms of nonnegative Schrödinger heat semigroup and the large time behavior of hot spots、Geometric properties of solutions of nonlinear PDEs and their applications、2011、7 月 18 日、Banff International Research Station (Canada)

〔図書〕（計　０件）
なし

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）
なし

○取得状況（計　０件）
なし

〔その他〕
ホームページ等　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
石毛　和弘（ISHIGE, Kazuhiro）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：９０２７２０２０

(2)研究分担者

小薗　英雄（KOZONO Hideo）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：００１９５７２８

小川　卓克（OGAWA, Takayoshi）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：２０２２４１０７

小池　茂昭（KOIKE, Shigeaki）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：９０２０５２９５

山田　澄生（YAMADA Sumio）
学習院大学・理学部・教授
研究者番号：９０３９６４１６

(3)連携研究者
柳田　英二（YANAGIDA Eiji）
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号：８０１７４５４８

壁谷　喜継（KABEYA Yoshitsugu）
大阪府立大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：７０２５２７５７