

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 27 日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654009

研究課題名(和文)直積多様体の理想境界に関する幾何解析と調和写像・アインシュタイン計量の研究

研究課題名(英文)Geometric analysis for ideal boundaries of product manifolds, and the study of harmonic maps and Einstein metrics

研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA, Kazuo)

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：80192920

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題に関して、非コンパクト多様体上のシュレーディンガー作用素の離散固有値の有限性・無限性、漸近的実双曲多様体間の調和写像に対する無限遠におけるディリクレ問題の存在と一意性、5次元ハイゼンベルグ群内の(極小)ルジャンドル曲面に対する表現公式と半空間定理、2次元複素ユークリッド空間内の極小ラグランジュ曲面のガウス写像の値分布、それぞれに関して一定の成果を上げた。

研究成果の概要(英文)：On this research theme, I have obtained the following results: (1) the finiteness and infiniteness theorems of discrete spectrum of the Schrodinger operators on noncompact manifolds, (2) the existence and uniqueness theorems of the Dirichlet problem at infinity for harmonic maps between asymptotic hyperbolic manifolds, (3) the representational formula and halfspace theorem for minimal Legendrian surfaces in the 5-dimensional Heisenberg group, (4) the value distribution theorem for the Gauss maps of minimal Lagrangian surfaces in the complex 2-space.

研究分野：数物系科学

キーワード：調和写像
多国籍 アインシュタイン計量 理想境界 直積多様体 幾何解析 国際研究者交流 国際情報交換

1. 研究開始当初の背景

ランクが2以上の既約な非コンパクト対称空間上のポアンカレ・アインシュタイン計量や、その間の調和写像の研究は皆無であり、また現時点では困難な問題である。そのためモデルケースとして双曲型空間の直積(既約ではない)を取り上げ、それから双曲型空間への調和写像、およびその直積空間上のポアンカレ・アインシュタイン計量を研究することから始めることは順当な計画であると思われる。

2. 研究の目的

以下の3つの研究が目的である。

- (1) 双曲空間の直積から双曲空間への和写像に対する無限遠ディリクレ問題の存在と一意性の研究を行う。
- (2) 双曲空間の直積上のポアンカレ・アインシュタイン計量の存在と一意性の研究を行う。
- (3) 双曲空間を一般化である漸近的双曲空間(および漸近的複素双曲空間)を考え、それらの空間に関わる調和写像およびポアンカレ・アインシュタイン計量の研究を行う。また既約な非コンパクト対称空間と関連する空間としてハイゼンベルグ群を取り上げ、その空間内の幾何構造(特に極小曲面)の研究を行う。さらに一般の非コンパクト完備多様体上のスペクトル幾何の研究も行う。

3. 研究の方法

双曲空間の直積の無限遠理想境界としては、先ず測地的半直線による Eberlein-0'Neil 理想境界が考えられるが、本研究では、この境界の適切な部分集合を無限遠理想境界(シロフ境界等)とすることによって、調和写像に関する無限遠境界値問題

の解の一意性と可解性を導くことを試みる。

一方、アインシュタイン計量も調和写像と多くの幾何的類似を持つ。この類似性に着目し、調和写像の研究で得られた知見をポアンカレ・アインシュタイン計量の研究へ応用する。

上記の2つの研究は、考えている空間の無限遠をどのように捉えるかが重要である。そのため関連した非コンパクト空間上での種々の幾何構造に関する幾何解析も同時に研究し、上記の研究と比較検討する。

本研究テーマに関係する国内外の研究者と積極的な研究交流を行い、セミナー・研究連絡を通して研究を進める。

4. 研究成果

研究目的の(1)、(2)に関しては、具体的な成果は得られなかった。しかしその問題点はこの3年間の研究で明確にしたので、今後同研究を続けていく予定である。この研究の前段階である漸近的双曲空間の間の調和写像に対する無限遠ディリクレ問題の存在と一意性に関しては満足できる結果を得ており、発表予定である。また漸近的複素双曲空間の間の調和写像に対しても興味深い結果が得られており、現在進展中である。

以下は研究目的の(3)に関する研究である。

5次元ハイゼンベルグ群内のルジャンドル曲面に対する表現公式および極小ルジャンドル曲面に対する半空間定理を与えた(論文)。関連して、2次元複素空間内の極小ラグランジュ曲面のガウス写像の値分布に関して最適の結果を得た。これも発表予定である。

かなり広いクラスの非コンパクト完備多様体上のシュレーディンガー作用素に対して、その離散固有値の個数の有限性・無限性

の判定に関する最適な結果を得た(論文).

ユークリッド空間内の重調和多様体が固有はめ込みであるとき,それは極小部分多様体であることを示した(論文).

4次元ユークリッド空間内の曲面の inflection points に関する一般論を展開した(論文 ,).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Reiko Aiyama, Kazuo Akutagawa, Minimal Legendrian surfaces in the five-dimensional Heisenberg group, Springer Proceedings in Mathematics, 巻未定 (2015), ページ未定, 掲載確定, 査読有

Reiko Aiyama, Kazuo Akutagawa, Surfaces with inflection points in Euclidean 4-space, Kodai Math. J., 37 (2014), 174-186, 査読有

DOI: 10.2996/kmj/1396008253

Reiko Aiyama, Kazuo Akutagawa, Semiumbilic points of minimal surfaces in Euclidean 4-space, Geom. Dedicata, 170(2014), 1-7, 査読有

DOI: 10.1007/s10711-013-9865-y

Kazuo Akutagawa, Shun Maeta, Biharmonic properly immersed submanifolds in Euclidean spaces, Geom. Dedicata, 164 (2013), 351-355, 査読有

DOI: 10.1007/s10711-012-9778-1

Kazuo Akutagawa, Hironori Kumura, Geometric relative Hardy inequality and the discrete spectrum of Schrodinger operators on manifolds, Calc. Var. Partial Differential Equations, 48 (2013), 67-88, 査読有

DOI: 10.1007/s00526-012-0542-z

[学会発表](計7件)

芥川和雄, Harmonic maps between asymptotically hyperbolic manifolds, 東北大学・大学院情報科学研究科「情報数理談話会」, 2015/1/27, 東北大学(宮城県仙台市青葉区), (招待講演)

芥川和雄, 多様体上の相対ハーディ不等式とシュレーディンガー作用素の離散固有値, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2014/10/17, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区), (招待講演)

Kazuo Akutagawa, Minimal Legendrian surfaces in the five-dimensional Heisenberg group, 国際研究集会「第10回日中友好幾何学研究会」, 2014/9/10, Fudan University, China (招待講演)

芥川和雄, 5次元ハイゼンベルグ群内の極小ルジャンドル曲面と正則データによるワイエルシュトラス表現, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」, 2014/9/5, 東京理科大学(東京都新宿区), (招待講演)

Kazuo Akutagawa, Minimal Legendrian surfaces in the five-dimensional Heisenberg group, Satellite Conference of Seoul ICN 2014 "Geometric Analysis", 2014/8/23, Sungkyunkwan University, Korea, (招待講演)

芥川和雄, 5次元ハイゼンベルグ群内の極小ルジャンドル曲面と正則データによるワイエルシュトラス表現, 福岡大学理学部「微分幾何セミナー」, 2014/7/24, 福岡大学(福岡県福岡市城南区), (招待講演)

Kazuo Akutagawa, Geometric relative Hardy inequality and the discrete spectrum of Schrodinger operators on

manifolds, Variational Problems &
Geometric PDE's, 2013/06/19, グラナダ
大学 (スペイン), (招待講演)

〔その他〕
ホームページ等
<https://sites.google.com/site/kazuokutagawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA, Kazuo)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：80192920

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

久村 裕憲 (KUMURA, Hironori)
静岡大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30283336

相山 玲子 (AIYAMA, Reiko)
筑波大学・大学院・数理物質科学研究科・
講師
研究者番号：20222466

(4) 研究協力者

Rafe Mazzeo
Department of Mathematics, Stanford
University (USA)

松本 佳彦 (MATSUMOTO, Yoshihiko)
東京工業大学・大学院理工学研究科・学
振 PD (H25 年度より参画)