

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654010

研究課題名(和文)特異空間に対するスペクトル逆問題の新展開

研究課題名(英文)New development of inverse spectral problems for singular spaces

研究代表者

山口 孝男 (Yamaguchi, Takao)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00182444

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の結果次のような知見が得られた。

(1)東北大学の三石史人氏との共同研究により、アレクサンドロフ空間の局所リップシッツ・ホモトピー構造が解明された。(2)リッチ曲率が一様に下に有界なリーマン多様体の極限空間は、その正則部分において、ある弱い意味で計量がリップシッツ連続である(最近のコールディングとネイパー両氏の研究)。この事実から、リッチ曲率が一様に下に有界なリーマン多様体の極限空間に対して、タタルの一意接続定理を拡張できる可能性が出てきた。(3)曲率が $-\infty$ に発散しつつ崩壊する曲面の上でシュレディンガー型作用素のスペクトル極限を考察することが、量子グラフの波動の研究に役立つことが分かった。

研究成果の概要(英文)：We have obtained the following mathematical findings as results of this research project. (1) By a joint work with Ayato Mitsuishi, we found local Lipschitz homotopy structure of Alexandrov spaces. (2) We observed that there is a possibility of establishing Tataru's unique continuation theorem for waves on the GH-limit spaces of Riemannian manifolds whose Ricci curvatures are uniformly bounded below. (3) We found that considering spectral limits of Schrodinger operators on collapsed surfaces whose curvatures explode to $-\infty$ should be useful in the study of waves of some quantum graphs.

研究分野：微分幾何学

キーワード：スペクトル逆問題 特異空間

1. 研究開始当初の背景

Yaroslav Kurylev (University College London)、Matti Lassas (University of Helsinki) 両氏と代表者とのこれまでの共同研究により、断面曲率の絶対値と直径が一樣に有界な閉じたリーマン多様体のモジュライ空間において、グロモフ・ハウスドルフ距離に関するコンパクト化に対する、熱核の局所データから空間を決定するスペクトル逆問題の一意性、およびその安定性が得られていた。そこでこの結果を断面曲率が一樣に下からのみ有界な閉じたリーマン多様体のモジュライ空間というより大きな枠組みに拡張することが課題となっていた。そのために、断面曲率が一樣に下に有界な閉じたリーマン多様体のグロモフ・ハウスドルフ距離に関する極限空間でもあるアレクサンドロフ空間に代表される特異空間に対してスペクトル逆問題を展開する必要があった。

2. 研究の目的

本研究においては、空間の熱核の局所的なスペクトル・データという解析的情報から空間を再構成する、いわゆるゲルファンド・スペクトル逆問題を、アレクサンドロフ空間といったワイルドな空間の枠組みで考察し、次の一意性と安定性を解明する。

- (1) アレクサンドロフ空間に対して、熱核の局所的なスペクトル・データという解析的情報によるスペクトル逆問題の一意性を証明する。
- (2) 断面曲率が下に、直径が上に一樣に有界な n 次元の閉じたリーマン多様体のモジュライ空間のコンパクト化において、熱核の局所的なスペクトル・データによるスペクトル逆問題の安定性を証明する。

3. 研究の方法

- (1) 測度距離空間の幾何解析的手法、特に曲率次元条件を満たす測度距離空間は、

リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の特異空間版であり、アレクサンドロフ空間の幾何解析を更に進展させる上でも、この方面の最新の研究成果を取り入れて行くことは重要である。本研究において、太田慎一氏、横田拓氏、北別府悠氏達との京都大学における定期的なセミナーにより、この方面の最新の重要な研究成果を吸収することができた。

- (2) 代表者のロンドン大学、ヘルシンキ大学への出張、Kurylev、Lassas 両氏の筑波大学への招聘により、崩壊多様体のスペクトル逆問題研究が大きく進展した。代表者がニュートン研究所やミッタク・レフラー研究所でスペクトル逆問題研究に携わったことも、スペクトル逆問題研究の世界的な動向を知り研究の方向付けを与える上で有益であった。

- (3) 横田巧氏とのリッチ流特異点解析に関する議論も、世界のリッチ流幾何解析の動向を知る上で有益だった。また本多正一氏とのリッチ極限空間の可微分構造に関する議論は今後の研究を展開する上で大変有益だった。

- (4) 各年度にわたり研究集会「リーマン幾何と幾何解析」を筑波大学で開催し、研究課題全般の活性化と研究分野における若手の育成、情報交換などに努めた。特に平成27年3月の研究集会では、幾何学的フォーの研究者が多く集まり、本研究計画を締めくくるに当たって有益だった。

4. 研究成果

本研究の結果次のような重要な知見が得られた。

- (1) 測地線の分岐を許すような特異的な空間の収束の下でスペクトルの順問題や逆問

題を考察するためには、通常のラプラス・ベルトラミ作用素に曲率項を加えたシュレディンガー型作用素を考えるべきである。

- (2) 東北大学の三石史人氏との共同研究により、アレクサンドロフ空間の局所リプシッツ・ホモトピー構造が解明され、ホモトピー的にはアレクサンドロフ空間にリプシッツ構造が入ることが判明した。
- (3) リッチ曲率が一様に下に有界なリーマン多様体の極限空間は、その正則部分において弱い意味で計量がリプシッツである（最近のコールディングとネイバーや本多正一氏の仕事）ことから、リッチ曲率が一様に下に有界なリーマン多様体の極限空間に対して、波動に関するタタルの一意接続定理を拡張する可能性が出てきた。
- (4) 曲率の下限が $-$ に発散するような特異的に崩壊していく曲面の上でシュレディンガー型作用素のスペクトル極限を考察することにより、Comb-グラフに類似の量子グラフの分散的波動の伝搬に関する研究において、量子グラフに対応する弾性体モデルの数学的定式化が可能になることが分かった。これにより、曲率の下限が $-$ に発散するような特異的な崩壊現象の解明という新たな研究プロジェクトの必要性和その有効性に関して新たな知見が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

1. Mitsuishi Ayato and Yamaguchi, Takao Stability of strongly Lipschitz contractible balls in Alexandrov spaces, Math. Zeit. 277 (2014), 995-1009. 査読有.

DOI 10.1007/s00209-014-1289-3

2. Mitsuishi Ayato and Yamaguchi, Takao Locally Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces, Pacific J Math. 270 (2014) 393-421, 査読有, DOI 10.2140/pjm.2014.270.393

3. Mitsuishi Ayato and Yamaguchi, Takao Collapsing three-dimensional Alexandrov spaces with a lower curvature bound, to Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), 2339-2410. 査読有. DOI <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06091-1>

[学会発表](計 7件)

1. T.Yamaguchi, Lipschitz homotopy structure of Alexandrov spaces, Trends in Modern Geometry, 東京大学, 2014年7月8日
2. 山口孝男 アレクサンドロフ空間のリプシッツ・ホモトピー構造、談話会 京都大学 2014.6.25
3. 山口孝男 境界つき3次元アレクサンドロフ空間の崩壊、微分トポロジーセミナー、京都大学、2014.5.20
4. 三石史人、山口孝男境界つき3次元アレクサンドロフ空間の崩壊、2015年日本数学会年会幾何学分科会、2015年3月24日
5. Yamaguchi, Takao, Collapsing three dimensional Alexandrov spaces I, II. Moduli spaces of low dimensional manifolds, 京都大学数理解析研究所、2013年11月5日

6. 山口孝男、崩壊とスペクトル逆問題、第
60回幾何学シンポジウム基調講演、東
京工業大学、2013年8月24日

7. Yamaguchi, Takao, Collapsing manifolds
and inverse spectral problems, Geometry
and Probability, Kyoto University, August
10, 2013

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

山口 孝男 (Yamaguchi takao)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00182444

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：