

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：17501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800086

研究課題名(和文) 退化性を持つ非線形放物型方程式と結晶粒界現象を記述する数学モデルに対する数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis for nonlinear parabolic equations with degeneracy and mathematical models of grain boundary motion

研究代表者

渡邊 紘 (Watanabe, Hiroshi)

大分大学・工学部・准教授

研究者番号：30609912

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：強退化放物型方程式の連立系に対する適切性理論構築を目指した研究を行うことが本研究の第1の目的である。実際、変数係数を持つ方程式に対する適切性を明確にまとめることができた。そしてその応用として非局所量に関して連立する方程式系の適切性を示すことができた点は大きな成果である。本研究第2の目的は結晶粒界現象を記述する数学モデルに対する様々な設定の下における可解性を示すことである。実際、モデル導出初期の設定に加え、係数が退化する場合、凝固効果を加えた場合、熱交換を加えた場合における可解性を示すことができた。さらに、構成した解の時刻無限大における解挙動を特徴付けることができた。

研究成果の概要(英文)：First purpose of the research is to study about the construction of well-posedness theory for systems of strongly degenerate parabolic equations. In fact, we clarify well-posedness for single strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients. Moreover, we show well-posedness for systems of it coupling by means of nonlocal quantities. Second purpose of the research is to show the solvability for the mathematical models which are described by grain boundary motion under various situations. In fact, we show the solvability of the model with degenerate coefficients, solidification effect and heat exchanges. Moreover, we characterize the large time behavior of the solutions.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：退化放物型方程式 適切性 エントロピー解 非局所量 結晶粒界現象 変分不等式 エネルギー消散性 時間大域的挙動

1. 研究開始当初の背景

(1) 退化放物型方程式

本研究では非線形移流項と非線形拡散項を持つ方程式を取り扱う。この方程式は退化放物型方程式と呼ばれ、放物型方程式と双曲型方程式の性質を持つ。一般に、非線形拡散項の性質により拡散項が0となって消えてしまう現象を「退化」と呼んでおり、拡散項が退化する領域が正の測度を持つ場合は特に「強退化」と呼ばれている。強退化放物型方程式に対する適切性は幾つかの結果が得られているが、連立系の適切性に関する結果はほとんど得られていない。

(2) 結晶粒界現象を記述する数学モデル

本研究で扱う数学モデルは、2000年に Kobayashi-Warren-Carter によって導出された2本の非線形放物型方程式の連立形である。この数学モデルは全変動測度を含む熱方程式である第1方程式と、未知変数依存の重みを持つ特異拡散方程式である第2方程式との連立系である。このモデルの可解性は1次元第2種境界値問題に対してのみ白川-渡邊-山崎(2013)によって得られている。

2. 研究の目的

(1) 強退化放物型方程式

儀我-宮川(1983)による動力的定式化を用いた解の構成を行い、問題の適切性を証明する。

不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対するエントロピー解の存在と一意性を証明する。また適合エントロピーを用いた解を定式化し、その存在と一意性を検証する。

解の初期値や係数への連続的依存性についての評価を整理し、連立系に対する適切性の理論構築を試みる。

(2) 結晶粒界現象を記述する数学モデル

1次元第2種境界値問題の解の性質と時刻無限大における解の挙動を考察する。

モデルの係数に退化性を持たせる等、様々な状況下における解の存在を証明し、解の時間大域的挙動を考察する。

解の形を限定し、1次元空間における解の挙動を解析する。

3. 研究の方法

(1) 強退化放物型方程式

強退化放物型方程式を連続体の方程式と捉え、対応する離散体の方程式を考える。この方程式は輸送・拡散方程式となり、双曲型単独保存則に対して儀我-宮川(1983)、小林(1985)、退化放物型方程式に対して小林(1987)、岡本(1993)らによって解作用素が構成されている。これらの先行研究の結果を強退化放物型方程式に対して拡張する。

強退化放物型方程式が不連続な係数を持つ場合は近似解の変動量が一樣に有界にならないため、従来の証明法を使用すること

はできない。本研究では弱収束法の一つであるH-測度を用いたコンパクト性定理を近似解の有界列に適用することで、この困難さを克服する。

連立系に対する可解性を証明する際には縮小写像を構成することが手段の一つであると考えられる。そして縮小写像を構成するには単独方程式の解の初期値や係数に関する連続的依存性が鍵となる。この点に着目し、変数係数を持つ単独の方程式に対する適切性の結果を見直す。そして各項や境界条件が解に与える影響を評価する。また、方程式が解自身に関して連立しているわけではなく、解の積分量に関して連立している場合も考慮に入れて考察を行う。この定式化は数理生物学や工学で導出される数学モデルに見られる形である。

(2) 結晶粒界現象を記述する数学モデル

重み付き特異拡散項を数学的に正当化するために、問題を1次元に限定し、ソボレフの埋め込み定理を用いて近似解を収束させることを試みる。近似解の収束極限に対しては有界変動関数や測度論の一般論を用いて特徴づけを行う。

第2方程式の時間微分の係数が退化する場合に対する1次元問題の解の存在を示す。そして係数の退化領域と非退化領域に分け、解の滑らかさに注意しながらモスコ収束を適用する。その他の設定においても、汎関数のモスコ収束やガンマ収束を中心に考察を行う。また多次元問題に対しては時間離散化法を用いて解を構成する。

1次元問題における解の挙動の解析を行う。小林-儀我(1999)により、この結晶粒界モデルが持つべき解の形が与えられている。本研究では定常問題に限定し、この形の解の構成を行う。

4. 研究成果

(1) 強退化放物型方程式

2013年度の成果

定数係数を持つ強退化放物型方程式の多次元初期値問題に対し、動力的定式化を用いた解の構成を行った。実際、岡本(1993)による退化放物型方程式に対する解の構成法を強退化の場合に修正することで結果を得た。変数係数を持つ場合や初期値境界値問題に対しては今後の課題となった。

方程式の係数が滑らかな場合に対する多次元 zero-flux 境界値問題を取り扱った。そして有界変動関数の空間内でエントロピー解を構成し、その一意性を証明した。次に非線形移流項が空間変数に関して不連続な場合に対する1次元 zero-flux 境界値問題と初期値問題を考察した。そしてエントロピー解の存在を証明した。また、非線形移流項に対して特別な仮定(増大条件)を課した下で、構成したエントロピー解の一意性を証明した。

2014年度の成果

1 次元初期値問題を考察した。本年度は移流項が空間変数に不連続に依存していることに加え、拡散項は空間変数に滑らかに依存している場合を考察した。拡散項が変数係数の場合は一般解の定式化を見直す必要があるため、エントロピー三重組を用いて適切なエントロピー解を定式化した。

次に適合エントロピーを用いた一般解の定式化を試みた。その際にはある性質を持つ定常解を使用する必要があることが判明したが、その存在を示すまでには至らなかった。従って、本研究開始時点の想定を上回る困難さを持つ問題であることが分かり、今後の課題となった。

2015年度の成果

移流項と拡散項の両方が変数係数となる強退化放物型方程式の多次元初期値問題の適切性を考察した。解の存在を示す際には近似解の変動量評価が必要になるが、拡散項が変数係数の場合に導出するのは困難であった。本研究では Wu-Zhao(1983)によって用いられた計算法と仮定に従うことで、この困難さを克服した。さらに解の一意性と初期値、係数に対する連続的依存性を得るためには Chen-Karlsen(2004)の計算法を利用した。

2016年度の成果

非局所量に依存して連立する強退化放物型方程式に対する多次元初期値問題を考察した。本研究で考える非局所量は滑らかで特異性を持たない行列値関数と解ベクトルの合成積として定義されている。適切性を示すにはこれまでに得られている単独の方程式に対する適切性の結果と縮小写像の不動点定理を用いた。非局所量内の行列値関数が特異性を持つ場合に対する考察は今後の課題となった。

(2) 結晶粒界現象を記述する数学モデル

2013年度の成果

1 次元第 2 種境界値問題を考察した。そして自由エネルギーの定義域の閉包から初期関数を取った場合に対する解(弱解)の存在を証明した。また、構成された解がエネルギー消散性を持つことも得られた。証明にはヒルベルト空間上の適性下半連続凸関数に関するモスコ収束性を本質的に用いている。

さらに連立系の第 2 方程式である重み付き特異拡散方程式の時間微分の係数が退化する場合を考察した。これにより結晶面の鋭い界面が再現できるようになる。1 次元第 2 種境界値問題のみを考察し、解の存在を証明した。そして構成した解がエネルギー消散性を持つことを示し、構成した解の時間大域的挙動は定常問題の解で特徴付けられることを証明した。

2014年度の成果

1 次元問題に対する解の存在に関しては幾つかの結果が得られているが、解の一意性を証明するのは非常に困難な状況である。この

状況から本年度は、解の近似に関する「安定性」を保証することを目的とした。実際、近似法の「有効域」を定義することができ、その範囲内の近似法を用いれば、自由エネルギーを消散させる解を構成することを示した。

1 次元問題の解挙動を考察した。第 1 方程式には第 2 種境界条件、第 2 方程式には第 1 種境界条件を課した初期値境界値問題を対象とした。そして第 2 方程式の解を区分的定数関数として具体的に与え、第 1 方程式の解を構成することを試みた。実際、不連続点が 1 つまたは 2 つの場合は解の構造を特徴付けられたが、一般の場合に対する解構造の特定までには至らず、今後の課題となった。

2015年度の成果

小林によって等温凝固下での平面的な結晶粒界現象を記述するフェーズ・フィールドモデルが 2001 年に導出された。本年度はこのモデルを基にした連立偏微分方程式の多次元初期値境界値問題を考察した。このモデルは 3 本の放物型方程式の連立形である。そして変分不等式の意味での解を定式化し、その存在を時間離散化法を用いて証明した。

また時間依存する重み付き全変動汎関数のガンマ収束が得られた。これを用いることで構成した解の時間大域的挙動を示した。実際、解の時刻無限大における極限関数は定常解で特徴づけられることを証明した。特に本モデルでは定数としている温度を十分大きく(小さく)取ることにより、結晶が融解(凝固)し、結晶方位が定まる(定まらない)ことが確認できた。

2016年度

Warren-Kobayashi-Lobkovsky-Carter によって凝固効果を組み入れた結晶粒界現象を記述する数学モデルが 2003 年に導出された。本年度はこのモデルと、非線形関数を用いて潜熱の効果を組み込んだ熱方程式との連立系を定式化した。そして熱方程式に対しては第 3 種境界条件、結晶粒界モデルには第 2 種境界条件を課した多次元初期値境界値問題の考察を行った。定式化を行うにあたり、モデルに含まれる二重井戸型関数の取り方を一般化したことが特徴の一つである。そして変分不等式の意味の解の存在を証明した。証明にはヒルベルト空間における熱方程式の解法と時間離散化法を用いて近似解を構成し、汎関数のガンマ収束を用いて近似解の収束を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

1. Salvador Moll, Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Energy dissipative solutions to the Kobayashi-Warren-Carter system, to appear in

- Nonlinearity (2017), 査読有.
2. Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Solvability for the non-isothermal Kobayashi-Warren-Carter system, AIMS Mathematics, 2(1) (2017), 161–194, 査読有. DOI : 10.3934/Math.2017.1.161
 3. Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Noriaki Yamazaki, Mathematical analysis for a Warren-Kobayashi-Lobkovsky-Carter type system, 京都大学数理解析研究所講究録, 1997, (2016) 64–85, 査読無.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1997-06.pdf>
 4. Hiroshi Watanabe, Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients, 京都大学数理解析研究所講究録, 1984, (2016), 23–45, 査読無.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1984-03.pdf>
 5. Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Large-time behavior for a PDE model of isothermal grain boundary motion with a constraint, Dynamical Systems and Differential Equations, AIMS Proceedings 2015, Proceedings of the 10th AIMS International Conference (Madrid, Spain), 1009–1018, 査読有. DOI:10.3934/proc.2015.1009
 6. Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Noriaki Yamazaki, Phase-field systems for grain boundary motions under isothermal solidifications, Adv. Math. Sci. Appl., 24 (2014), no.2, 353–400, 査読有.
<http://mcm-www.jwu.ac.jp/~aikit/AMSA/current.html#fh5co-tab-feature-vertical2>
 7. Hiroshi Watanabe, Ken Shirakawa, Stability for approximation methods of the one-dimensional Kobayashi-Warren-Carter system, Mathematica Bohemica, 139 (2014), no.2, 381–389, 査読有.
http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/143863/MathBohem_139-2014-2_2.pdf
 8. Hiroshi Watanabe, Solvability of boundary value problems for strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 7 (2014), no. 1, 177–189, 査読有. DOI:10.3934/dcdss.2014.7.177
 9. Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Energy-dissipative solution to a one-dimensional phase field model of grain boundary motion, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 7 (2014), no. 1, 139–159, 査読有. DOI:10.3934/dcdss.2014.7.139
 10. Hiroshi Watanabe, Entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with zero-flux boundary conditions, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 23 (2013), no.1, 209–234, 査読有.
<http://mcm-www.jwu.ac.jp/~aikit/AMSA/current.html#fh5co-tab-feature-vertical3>
 11. Hiroshi Watanabe, Shirakawa Ken, Qualitative properties of a one-dimensional phase-field system associated with grain boundary, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 36 (2013), 301–328, 査読有.
 12. Hiroshi Watanabe, Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Discrete Contin. Dyn. Syst.-Proceedings 2013, Dedicated to the 9th AIMS Conference, Orlando, Florida, USA, 781–790, 査読有. DOI:10.3934/proc.2013.2013.781
 13. Ken Shirakawa, Hiroshi Watanabe, Noriaki Yamazaki, Solvability for one-dimensional phase field system associated with grain boundary motion, Mathematische Annalen, 356 (2013), 301–330, 査読有. DOI : 10.1007/s00208-012-0849-2
- [学会発表](計 31 件)
1. 渡邊紘, 変数係数を持つ非局所的強退化放物型方程式系に対する時間大域解, 日本数学会 2017 年度年会, 実函数論分科会, 一般講演, 2017 年 3 月 27 日(24-27 日), 首都大学東京(東京都八王子市).
 2. 白川健, 渡邊紘, S.MoII, 非斉次 Dirichlet 型境界条件を組み入れた結晶粒界運動のフェーズ・フィールドモデル, 日本数学会 2017 年度年会, 実函数論分科会, 一般講演, 2017 年 3 月 27 日(24-27 日), 首都大学東京(東京都八王子市).
 3. 渡邊紘, 非局所的放物型・双曲型保存則系に対する適切性, 第 42 回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2016 年 12 月 26 日(25-27 日), 日本女子大学(東京都文京区).
 4. 白川健, 渡邊紘, S.MoII, 結晶粒界運動の非等方的フェーズ・フィールドモデルにおけるエネルギー消散性, 第 42 回発展方程式研究会, 2016 年 12 月 27 日

- (25-27 日), 日本女子大学 (東京都文京区).
5. 渡邊紘, 変数係数を持つ非局所的強退化放物型方程式系, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会, 一般講演, 2016 年 9 月 18 日(15-18 日), 関西大学 (大阪府吹田市).
 6. 渡邊紘, Wellposedness for nonlocal parabolic-hyperbolic conservation laws, PDE Summer Seminar in Fukuoka, 2016 年 9 月 2 日, 福岡大学セミナーハウス (福岡県福岡市).
 7. Hiroshi Watanabe, Parabolic-hyperbolic conservation laws with variable and nonlocal type coefficients, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 78, Advances in Analysis of Mathematical Problems arising from Materials and Biological Science, 2016 年 7 月 1 日 (1-5 日), Hyatt Regency Orlando(Orlando, Florida, USA).
 8. 渡邊紘, 変数係数を持つ強退化放物型方程式の BV-エントロピー解に対する連続的依存性, 日本数学会 2016 年度年会, 実函数論分科会, 一般講演, 2016 年 3 月 19 日(16-19 日), 筑波大学 (茨城県つくば市).
 9. 白川健, 渡邊紘, S.MoII, 異方性を加味した結晶粒界運動のフェーズ・フィールドモデルに対するエネルギー消散性, 日本数学会 2016 年度年会, 実函数論分科会, 一般講演, 2016 年 3 月 19 日(16-19 日), 筑波大学 (茨城県つくば市).
 10. 渡邊紘, 白川健, 結晶粒界の非等温系モデルのエネルギー消散性と漸近挙動, 第 41 回発展方程式研究会, 2015 年 12 月 25 日(25-27 日), 日本女子大学 (東京都文京区).
 11. 渡邊紘, 変数係数を持つ放物型・双曲型単独保存則に対する適切性, 第 6 回「拡散と移流の数理」, 2015 年 12 月 5 日, 愛媛大学 (愛媛県松山市).
 12. 渡邊紘, 白川健, 結晶粒界現象を記述する非等温系数学モデルに対する解の漸近挙動, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会, 一般講演, 2015 年 9 月 16 日(13-16 日), 京都産業大学 (京都府京都市).
 13. 白川健, 渡邊紘, S.MoII, 異方性を加味した結晶粒界運動の Kobayashi-Warren-Carter 型数学モデル, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会, 一般講演, 2015 年 9 月 16 日(13-16 日), 京都産業大学 (京都府京都市).
 14. Hiroshi Watanabe, Solvability of some degenerate parabolic equations with convective terms, EquaDiff 2015, 2015 年 7 月 7 日 (6-10 日), Universite Claude Bernard Lyon 1 (Lyon, France).
 15. 渡邊紘, 非等温条件下での Warren-Kobayashi-Lobkovsky-Carter 型の結晶粒界モデル, 表面・界面ダイナミクスの数理 IX, 2015 年 4 月 23 日(22-44 日), 東京大学 (東京都目黒区).
 16. 渡邊紘, 変数係数を持つ強退化放物型方程式の可解性, 日本数学会 2015 年度年会, 実函数論分科会, 一般講演, 2015 年 3 月 21 日(21-24 日), 明治大学 (東京都千代田区).
 17. 白川健, 渡邊紘, 非等温条件下における結晶粒界現象のフェーズフィールドモデル, 日本数学会 2015 年度年会, 実函数論分科会, 一般講演, 2015 年 3 月 21 日(21-24 日), 明治大学 (東京都千代田区).
 18. 渡邊紘, 変数係数を持つ強退化放物型方程式に対する初期値問題の適切性, 第 40 回発展方程式研究会, 2014 年 12 月 25 日(25-27 日), 日本女子大学 (東京都文京区).
 19. Hiroshi Watanabe, Solvability of strongly degenerate convection-diffusion equations with variable coefficients, Seminario de Analisis Matematico, 2014 年 12 月 2 日, Universitat de Valencia (Valencia, Spain).
 20. 渡邊紘, Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients, RIMS 研究集会「抽象発展方程式理論から見た偏微分方程式に関する評価方法の再考」, 2014 年 10 月 22 日 (22-24 日), 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市).
 21. 渡邊紘, 白川健, Allen-Cahn 型方程式と結晶粒界モデルによる連立系の時刻無限大における解挙動, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会, 一般講演, 2014 年 9 月 28 日 (25-28 日), 広島大学 (広島県東広島市).
 22. 白川健, 渡邊紘, 凝固現象と結晶粒界現象の等温系カップリングモデルにおけるエネルギー消散解, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会, 一般講演, 2014 年 9 月 28 日 (25-28 日), 広島大学 (広島県東広島市).
 23. 渡邊紘, 強退化放物型方程式の一意可解性, 第 53 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2014 年 9 月 3 日 (3-5 日), 学習院大学 (東京都豊島区).
 24. Hiroshi Watanabe, Strongly degenerate parabolic equations with diffusion coefficients depending on the spatial variable, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 27, Mathematical problems in

economics, materials and life science: Analysis and simulation of nonlinear multiscale dynamics, 2014 年 7 月 9 日 (7-11 日), The Universidad Autonoma de Madrid (Madrid, Spain).

25. Hiroshi Watanabe, Strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients, Conference on Partial Differential Equations, 2014 年 5 月 29 日 (28-31 日), Novacella, Italy.
26. 渡邊 紘, 空間変数に依存する拡散項を持つ強退化放物型方程式, 日本数学会 2014 年度年会, 実函数論分科会 一般講演, 2014 年 3 月 18 日 (15-18 日), 学習院大学 (東京都豊島区).
27. 白川健, 渡邊 紘, 山崎教昭, 結晶粒界現象に対する凝固による界面拡散を考慮した数学モデル, 日本数学会 2014 年度年会, 実函数論分科会 一般講演, 2014 年 3 月 18 日 (15-18 日), 学習院大学 (東京都豊島区).
28. 渡邊 紘, 白川健, 退化性を伴う 1 次元 Kobayashi-Warren-Carter モデルに対する定性的性質, 第 39 回発展方程式研究会, 2013 年 12 月 23 日 (21-23 日), 日本女子大学 (東京都文京区).
29. 渡邊 紘, 白川健, 結晶粒界現象を記述する退化性を伴う 1 次元数学モデルに対する定性的性質, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会 一般講演, 2013 年 9 月 25 日 (24-27 日), 愛媛大学 (愛媛県松山市).
30. 白川健, 渡邊 紘, S. Moll, 結晶粒界現象の放物型フェーズ・フィールドモデルにおける平滑化効果とエネルギー消散性, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 実函数論分科会 一般講演, 2013 年 9 月 25 日 (24-27 日), 愛媛大学 (愛媛県松山市).
31. Hiroshi Watanabe, Energy-dissipations in multidimensional Kobayashi-Warren-Carter models of grain boundaries, Equadiff 13, Faculty of Arts, 2013 年 8 月 26 日 (26-30 日), Charles University in Prague (Prague, Czech).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡邊 紘 (WATANABE, Hiroshi)
大分大学・工学部・准教授
研究者番号: 30609912

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

白川 健 (SHIRAKAWA, Ken)
Moll, Salvador