

令和元年6月27日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287012

研究課題名(和文) 左不変な幾何構造の部分多様体論的研究

研究課題名(英文) Studies on left-invariant geometric structures by submanifold theory

研究代表者

田丸 博士 (Tamaru, Hiroshi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50306982

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,600,000円

研究成果の概要(和文)：対称空間内の部分多様体，リー群上の左不変な幾何構造，またそれらの融合的な研究，いずれにおいても進展があった。特に，左不変リーマン計量の場合には，その研究の基礎的な部分を担う論文が出版され，モジュライ空間が小さくなるようなリー群の分類を一定の条件下で得ることができた。さらに，その枠組みを他の左不変な幾何構造にも広げ，特定の冪零リー群上の左不変ローレンツ計量のモジュライ空間の完全に記述や，左不変シンプレクティック構造の存在非存在を判定する方法を確立することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

左不変な幾何構造と部分多様体論を繋ぐ研究は我々の独自のものであり，そのような研究を創出することは学術的な意義をもつもとだと考える。特に，新しい分野において新しい問題を提出したことは，今後の数学の発展にも寄与するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：We have had progresses on submanifold geometry of symmetric spaces, left-invariant geometric structures, and their fusional studies. In particular, for left-invariant Riemannian metrics, several papers which construct the basic of our study have been published. Moreover, we also constructed similar frameworks for other left-invariant geometric structures, described the moduli space of left-invariant Lorentzian metrics on some particular nilpotent Lie groups, and establish a method to examine the existence and nonexistence of left-invariant symplectic structures on a given Lie group.

研究分野：幾何学

キーワード：対称空間 部分多様体 リー群 左不変計量 幾何構造

1. 研究開始当初の背景

リー群上の左不変な幾何構造は、極めて豊富な研究対象である。実際、 n 次元リー代数全体の集合は十分に大きな空間であり、その上の左不変リーマン計量全体の集合も十分に大きな空間である。これらの中には、特別な幾何構造の非自明な具体例が数多く含まれる。例えば可解リー群上の左不変リーマン計量は、近年非常に活発に研究されており、Einstein や Ricci soliton 計量の豊富な具体例が発見されている。また、左不変なシンプレクティック構造や左不変な（一般化された）複素構造についても、同様に非自明な具体例が知られている。

しかし一方で、与えられたリー群が特別な左不変幾何構造を許容するかどうかを判定せよ、という問題に対しては、低次元などの特別な場合を除くと、驚くほど多くのことが未解決である。与えられたリー群 G に対して、以下のような基本的な問題でさえ、解決されているとは言い難い：

- ・ G 上の特別な左不変リーマン計量の存在・非存在を判定する方法を確立せよ。
- ・ G が特別な左不変リーマン計量を許容するかどうかを、リー群の不変量を用いて特徴付けよ。

2. 研究の目的

我々は、非コンパクトリーマン対称空間への群作用と、リー群上の左不変リーマン計量の研究を行ってきた。その中でも特に、リー群 G 上の左不変リーマン計量の幾何を、 G の代数構造に付随した群作用を用いて研究する、という枠組みを提唱している。本研究では、これを発展させ、 G が左不変 Einstein (あるいは Ricci soliton) 計量を許容するための代数的な障害を研究する。

さらに、上記の研究の枠組みを、その他の左不変な幾何構造の研究へと広げる。それぞれの幾何構造に応じた群作用を考えることにより、考えている幾何構造と相性の良い代数的な不変量を、統一的な視点から導出する。これにより、左不変な幾何構造を統一的に扱う理論の構築を目指す。

3. 研究の方法

各種の左不変な幾何構造に対して、その全体の空間を考える。例えば、左不変な擬リーマン計量全体の空間、左不変な複素構造全体の空間、左不変な非退化二次形式全体の空間は、いずれも対称空間となる（ただしリーマン対称空間とは限らない）。その対称空間への自己同型群の作用が、幾何構造に応じた群作用である。これらの作用を用いて、それぞれの幾何構造に応じた Milnor 枠の類似物を構成する。左不変リーマン計量に関しては、理論は完成している。左不変擬リーマン計量に関しても、同様の理論が成立することを確認している。この研究により、左不変擬リーマン Einstein (あるいは Ricci soliton) 計量・左不変複素構造・左不変シンプレクティック構造などの存在・非存在の判定方法が確立されると考えている。

リー群 G 上の各種の左不変な幾何構造に対して、その全体の空間への自己同型群の作用は、 G の代数構造に付随する不変量である。その軌道の平均曲率などは、考えている幾何構造と相性の良い不変量であることが期待される。そのような不変量と、特別な幾何構造の存在・非存在との関係を調べる。リーマン計量の場合のような良い対応があるかどうかの観察と、見つかっている良い対応の背後にある理論の解明の双方を行い、特別な左不変幾何構造を許容するための代数的な障害の構成を目指す。

4. 研究成果

リーマン対称空間内の全測地的部分多様体に関する研究を行った。特に、非平坦な全測地的曲面に関する研究に大きな進展があり、その合同類の分類を行うための手法を確立することができた。その応用として、エルミート対称空間内の全測地的複素曲線分類、また階数 3 までの AI 型対称空間内の全測地的部分多様体の分類などを得ることができた。

(μ, ν) 空間と呼ばれる、然るべき条件をみたす接触多様体に関する研究を行った。これらの空間において、計量がリッチソリトンならば (μ, ν) は $(0,0)$ または $(0,4)$ に限る、という先行研究があった。我々の研究により、 $(0,4)$ 空間は非コンパクトグラスマン多様体内の等質超曲面として実現できること、また実際に計量がリッチソリトンであることが示された。

部分多様体に関する研究の一環として、非コンパクト型リーマン対称空間への余等質性 1 作用についての研究を行った。特に、作用する群の連結性を仮定しない場合に、どのような型の余等質性 1 作用が存在し得るか、という問題については解決に至った。

左不変リーマン計量と部分多様体を関連付けた研究としては Milnor 枠の一般化を与える手法を確立した論文と、3 次元可解リー群の場合に極めて良い対応があることを示した論文が出版された。これらにより、我々の研究の基礎的な部分が確立したと考えられる。また、部分多様体の観点から左不変 Ricci soliton を許容するための障害を予想し、その予想に関する肯定的な例を与えることに成功した。さらに、今後の研究において重要な例となるであろう、左不

変リーマン計量のモジュライ空間が小さいリー群についての研究を行った。特に概アーベルリー群の場合には、モジュライ空間が1次元となるものを完全に分類することができた。

他の左不変な幾何構造に関しても研究が進展した。特に左不変擬リーマン計量については、リーマン計量の場合とほぼ同様の枠組みを構築することに成功している。さらに、典型的な冪零リー群である3次元ハイゼンベルグ群とユークリッド空間の直積群に対して、その上の左不変ローレンツ計量が自己同型と定数倍を除いてちょうど6個存在することを示した。また、同様の枠組みを左不変な非退化二次形式についても構築した。いくつかの特別な可解リー群に対しては、その上の左不変シンプレクティック構造の存在・非存在の判定、あるいは一意性を証明することができた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 42 件)

- (1) Sadahiro Maeda, Hiroshi Tamaru, Hiromasa Tanabe, Curvature properties of homogeneous real hypersurfaces in nonflat complex space forms. *Kodai Math. J.* 41 (2018), 315--331. DOI: 10.2996/kmj/1530496844
- (2) Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons --- a conjecture and examples. *Transf. Groups* 23 (2018), 257--270. DOI: 10.1007/s00031-017-9439-4
- (3) Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces. *J. Geom. Phys.* 123 (2018), 221--234. DOI: 10.1016/j.geomphys.2017.08.013
- (4) Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, The solvable models of noncompact real two-plane Grassmannians and some applications. In: *Hermitian-Grassmannian Submanifolds*, Springer Proc. Math. Stat. 203 (2017), 311--321. DOI: 10.1007/978-981-10-5556-0_26
- (5) Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds. *Internat. J. Math.* 28 (2017), 1750048 [31 pages]. DOI: 10.1142/S0129167X17500483
- (6) Akira Kubo, Kensuke Onda, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups. *Hiroshima Math. J.* 46 (2016), 357--374.
- (7) Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru, Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces. *Tohoku Math. J. (2)* 68 (2016), 559--568. DOI: 10.2748/tmj/1486177215
- (8) Hiroshi Tamaru, The space of left-invariant Riemannian metrics. In: *Geometry and Topology of Manifolds*, Springer Proc. Math. Stat. 154 (2016), 315--326. DOI: 10.1007/978-4-431-56021-0_17
- (9) Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, Kazuhiro Terada, Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. *J. Math. Soc. Japan* 68 (2016), 669--684. DOI: 10.2969/jmsj/06820669
- (10) Yoshitaka Ishihara, Hiroshi Tamaru, Flat connected finite quandles. *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016), 4959--4971. DOI: 10.1090/proc/13095
- (11) Seiichi Kamada, Hiroshi Tamaru, Koshiro Wada, On classification of quandles of cyclic type. *Tokyo J. Math.* 39 (2016), 157--171. DOI: 10.3836/tjm/1459367262
- (12) Sadahiro Maeda, Hiroshi Tamaru, Naturally reductive homogeneous real hypersurfaces in a nonflat complex space form. In: *Topology Appl.* 196, Part B (2015), 675--683. DOI: 10.1016/j.topol.2014.01.020
- (13) Shinobu Fujii, Hiroshi Tamaru, Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres --- Hermitian cases. *Transf. Groups* 20 (2015), 417--436. DOI: 10.1007/s00031-015-9305-1
- (14) Hiroshi Tamaru, Group actions on symmetric spaces related to left-invariant geometric structures. In: *Development of group actions and submanifold theory*, RIMS Kokyuroku 1929 (2014), 1--12.
- (15) Takuya Fujimaru, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru, On totally geodesic surfaces in symmetric spaces of type AI. In: *Real and Complex Submanifolds*, Springer Proc. Math. Stat. 106 (2014), 211--227. DOI: 10.1007/978-4-431-55215-4_19
- (16) Carlos Olmos, Silvio Reggiani, Hiroshi Tamaru, The index of symmetry of compact naturally reductive spaces. *Math. Z.* 277 (2014), Issue 3--4, 611--628. DOI: 10.1007/s00209-013-1268-0

[学会発表](計 50 件)

- (1) Hiroshi Tamaru: Examples of weakly reflective submanifolds in noncompact symmetric

- spaces, Hiroshima Differential Geometry Day 2018 (Hiroshima University), 2018/04/21.
- (2) Hiroshi Tamaru: Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some Lie groups, Geometry of Submanifolds and Integrable Systems (Osaka City University), 2018/03/27.
 - (3) Hiroshi Tamaru: Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some solvable Lie groups, AMS Special Session on Nilpotent and Solvable Geometry (San Diego, California),
 - (4) Hiroshi Tamaru: Symmetric spaces, submanifold geometry, and solvmanifolds, Capital Normal University-Hiroshima University Joint Conference on Mathematics (Capital Normal University, China). 2017/09/21.
 - (5) Hiroshi Tamaru: Left-invariant metrics and submanifold geometry, Lie Group Actions in Riemannian Geometry (Dartmouth College, USA). 2017/06/29.
 - (6) Hiroshi Tamaru: Ricci soliton and contact homogeneous hypersurfaces in noncompact symmetric spaces, Workshop on Differential Geometry, Gwangju-2017 (Chonnam National University, 韓国), 2017/03/31.
 - (7) Hiroshi Tamaru: Left-invariant metrics and submanifold geometry, The 7th International Workshop on Differential Geometry (Karatsu) 2017/03/24.
 - (8) Hiroshi Tamaru: Left-invariant metrics and submanifold geometry, Differential Geometry, Lie Theory and Low-Dimensional Topology (Melbourne), 2016/12/20.
 - (9) Hiroshi Tamaru: On totally geodesic surfaces in symmetric spaces and applications, Japan-China Geometry Conference (福建師範大学, 中国), 2016/09/08.
 - (10) Hiroshi Tamaru: Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces, The 11th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory (大阪市立大学), 2016/03/21.
 - (11) Hiroshi Tamaru: On totally geodesic surfaces in symmetric spaces and applications, Workshop in honor of Professor Hiroo Naitoh's retirement (山口大学), 2016/03/05.
 - (12) Hiroshi Tamaru: The space of left-invariant metrics and submanifold geometry, AMS Special Session on Ricci Curvature for Homogeneous Spaces and Related Topics (San Antonio, Texas), 2015/01/10.
 - (13) Hiroshi Tamaru: The space of left-invariant metrics, The 10th Geometry Conference for the Friendship between China and Japan, Fudan University (China), 2014/09/11.
 - (14) Hiroshi Tamaru: On totally geodesic surfaces in symmetric spaces of type AI, ICM 2014 Satellite Conference on Real & Complex Submanifold, NIMS (Korea), 2014/08/11.
 - (15) Hiroshi Tamaru: Group actions on symmetric spaces related to left-invariant geometric structures, Development of group actions and submanifold theory, RIMS, 2014/06/25.
 - (16) Hiroshi Tamaru: An interaction between geometry of left-invariant metrics and group actions on symmetric spaces, Submanifold Geometry and Related Topics, 大阪市立大学, 2014/04/14.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

6 . 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：澁谷 一博

ローマ字氏名：(SHIBUYA, Kazuhiro)

所属研究機関名：広島大学

部局名：理学研究科

職名：准教授

研究者番号(8桁): 00569832

研究分担者氏名： 奥田 隆幸
ローマ字氏名：(OKUDA, Takayuki)
所属研究機関名：広島大学
部局名：理学研究科
職名：講師
研究者番号(8桁): 40725131

研究分担者氏名： 阿賀岡 芳夫
ローマ字氏名：(AGAOKA, Yoshio)
所属研究機関名：広島大学
部局名：理学研究科
職名：教授
研究者番号(8桁): 50192894

(2)研究協力者 なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。