2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月　 6 日現在

機関番号：34504

研究種目：新学術領域研究（研究領域提案型）

研究期間：2012～2016

課題番号：24106005

研究課題名（和文）最適化技法との融合による計算限界解析法の深化

研究課題名（英文）Deepening analysis methods for limits of computation through integration with optimization techniques

研究代表者

加藤　直樹（Katoh, Naoki）

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40145826

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　61,600,000円

研究成果の概要（和文）：得られた成果は以下の通りである，
1. 近年活発に研究されている拡張定式化に関連して，理論上・応用上重要な疎性マトロイドに付随する多面体のコンパクトな表現を与えた. 2. 行列表現を持つ線形マトロイドに対して，重み付きのマトロイド・パリティ問題を解く最初の多項式時間アルゴリズムを与えた. 3. しらみつぶし探索法を本質的に改善できないと思われる問題間の新しい帰着（困難性証明技法）を開発し，指数時間計算可能性の分野における新しい標準を築いた
4. #P困難性の知られる0-1ナップサック多面体の体積計算に対して，多項式時間決定性近似アルゴリズムを与えた.

研究成果の概要（英文）：In this project, we obtained the following results.
1. On extended formulations that have been extensively studied recently, a compact representation is provided for sparsity matroids that play important roles both in theory and in practice. 2. The first polynomial-time algorithm is developed for the weighted linear matroid parity problem. 3. A novel reduction method (a hardness proof method) is developed among problems for which brute-force searches cannot be essentially surpassed, resulting in a new standard for the field of exponential-time computation. 4. A polynomial time deterministic approximation algorithm is presented to compute the volume of a 0-1 knapsack polytope which is known to be #P-hard.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：最適化理論　拡張定式化　疎性マトロイド　マトロイド・パリティ問題　計算限界分析　#P困難　体積計算

１．研究開始当初の背景

最適化理論とは，問題構造の解明および効率的な算法の設計を研究する分野である．一方，計算限界解析とは，様々な計算モデルの計算能力の限界を上界と下界の双方の視点から研究する分野である．この２つの分野はどちらも「有限の資源で何が（計算）できるのか」を明らかにすることが最終目標であると言える．つまり，最適化理論と計算限界解析は表裏一体のものであり，この２つの分野が有機的に絡み合い，理論的・人的交流が活発に行われることが本来望ましい姿である．例えば，多者間の通信における必要な情報量の限界の解明が目標である通信計算量の研究において，線形計画法が応用されていることは，このような融合の一つであると言える．また逆に，この通信計算量の枠組みを用いて最適化問題に対するアルゴリズムの効率性の下界を導くことに成功した研究などがある．確かにこのように２つの分野の融合が成功した例も見られるが，現状では最適化理論はオペレーションズ・リサーチ，計算限界解析は理論計算機科学といったように別の分野として捉えられており，まだ十分にその融合が十分であるとは言い難い．

２．研究の目的

「研究開始当初の背景」でも述べたが,「問題の構造」および「算法の設計」を研究する分野である最適化理論と, 計算能力の「上界」と「下界」を研究する計算限界解析は表裏一体のものであり，この二つの分野が有機的に絡みあうことが本来望ましい姿である．現在においても，通信計算量や論理関数の複雑性の解析における線形計画法の使用や，通信計算量の考え方を用いてマトロイドに対するアルゴリズムのある種の下界を導くといった部分的には成功した例も見られるが，まだ十分にその能力が発揮されているとは言えない．このような状況を鑑み，本研究では最適化理論における最先端の技法と計算限界解析を，以下の４つの観点から融合させることにより，新たなブレイクスルーを生み出すことを目標とする（図１参照）．

- ■ 視点 1：「算法設計」 × 「計算上界」
  最適化理論の手法による計算上界の研究
- ■ 視点 2：「算法設計」 × 「計算下界」
  最適化理論の手法による計算下界の研究
- ■ 視点 3：「問題構造」 × 「計算下界」
  計算限界解析が動機となる最適化の理論研究
- ■ 視点 4：「問題構造」 × 「計算上界」
  非線形性への耐性による最適化問題の複雑性

図１．本研究課題の４つの視点

本研究課題は特に理論研究に特化したものであるが，最適化手法を用いて計算限界の下界を打ち出す研究においては，補完的な意味を持つ他の研究課題のグループとの融合（例えば計算機援用アプローチとの融合など）を成功させることにより，これまでにない新たな流れを作り出すことが可能であると考えられる．また，本研究課題により見出すことのできた方法を他の研究課題のグループに提示することにより，方法の適用範囲・対象領域が拡大可能となり，新たな研究の創造が期待できる．

またチームを形成し最適化手法を大胆に計算限界解析に持ち込む試みそのもの自体が世界初の試みと言えるものであり，成功すれば分野にかなりのインパクトを与えることが可能であると思われる．さらに，最適化分野の研究に対しても明示的に計算限界の視点を持ち込むことにより，アルゴリズムの開発自体にも新たな革新，つまり計算限界研究の工学的応用の可能性も秘めている．

劣モジュラ関数や半正定値計画といった最先端の最適化理論が計算限界解析の研究においても必要不可欠な技術となっている現状において，最適化理論の研究者である本研究課題のメンバーが，他の計算限界解析や学習理論等の研究グループと最新の最適化理論との間の橋渡しを行うことも，本研究課題の重要な役割の一つである．

３．研究の方法

研究背景で述べた４つの観点から以下のような課題に取り組む．具体的な問題としては，数理計画法，厳密計算，乱択アルゴリズム，劣モジュラ最適化等の研究において生じる問題を上記の四つの観点から捉え直すことにより，最適化理論および計算限界解析における新たな研究の流れを生み出すことを目的とする以下のように４つの研究の視点を明確にし，これらの視点から最適化理論と計算限界解析の研究の融合を目指すことが本研究課題の特色として挙げられる．

まず観点１に関する研究としては，厳密計算に関わる時間計算量・空間計算量の詳細な評価を用いたより精密な分類の研究，そして問題構造に注目した乱択化の計算時間・領域効率性に関する研究を行う．厳密計算の研究に関しては，包除原理（2006 年）や高速部分集合畳み込み（2007 年）といった新たなアルゴリズム設計技法, 測定統治法（2005 年） やポテンシャル法（2011 年）を用いた計算量算定技法といった個々のアルゴリズム設計技法を俯瞰する計算上界解析のための代数的アプローチの確立を目指す．また乱択化に関する研究に関しては，Yasutake et al.（2011 年）によって提案された n 次の置換多面体中の点に対するほぼ最適な O(nlogn)時間 O(n)領域の乱択丸め法の，離散構造に着目したより一般の多面体への拡張に取り組み，乱択丸めの時間，領域効率性を計算上界の観点から解析する．

観点２からの研究としては，計算下界の分

類に対する還元の効率性からの研究，および Tutte 多項式などの関数値の近似計算に関する計算下界の研究を行う．一つ目の課題に関しては，指数時間仮説と強指数時間仮説に基づくアルゴリズム高速化下界証明法フレームワークの発達（2001 年～）や充足可能性問題のスパース化補題に基づく問題還元技法の発展（2001 年～）といった研究を元に，計算下界の分類を還元の効率性という視点から捉え直す研究を行う．また二つ目の課題に関しては，Tutte 多項式などの関数値の近似計算について，P≠NP を仮定しない多項式時間計算不可能性の証明を目指す．具体的には，情報理論的下界の技法を用いて，対数優/劣モジュラ分布のランダムサンプリング法の多項式時間計算不可能性の証明に取り組む．

続いて観点３からの研究としては，計算下界研究に現れる最適化問題の構造的性質を把握し，その構造を活かした算法開発の研究を行う．特に，その種の問題を整数計画問題として定式化した際の問題サイズや緩和の整数性といった厳密計算において重要な役割を担うパラメータを特定し，計算下界研究に貢献する．また，その種の整数計画問題は大きな対称性を持つことが予想されるが，対称性の高い整数計画問題は退化の度合いが大きいため，現状のソフトウェアでそのまま解くことが困難である．そこに，対称性の自動発見や対称性の除去といった最近の整数計画法研究で培われてきた技法を適用し，計算下界研究に貢献する．また，計算下界の研究において最適化問題を用いる際には，そもそもどのような最適化問題を使用するべきかという問題が生じる．これは，最適化問題のもつ表現力の強さと可解性のトレードオフの問題であるが，この問題の解決に向けた最適化手法を用いたアプローチを模索する．

最後に観点４からの研究としては，最適化問題の非線形性に対する耐性の強さによる問題の計算上界の複雑性の分類を行う．具体的には，劣モジュラ関数を用いた最適化問題の一般化を考えることによって，従来は多項式時間厳密解法の視点から分類していた組合せ最適化問題を，解法の拡張容易性という別の観点における計算困難性を基準として峻別することが期待される．本研究課題では，近似解法の拡張容易性の観点から，劣モジュラ最適化の研究を推進するとともに，高速指数時間厳密解法や確率的手法の拡張容易性という視点を追加することによって，離散最適化問題の計算上界を究明することを目的とする．

このように各研究の視点を明確にすることにより，今後の最適化理論と計算限界解析の研究の融合に一つの流れ・指針を与えることができると考える．

４．研究成果

ここでは以下の「主な発表論文」であげた論文に関して，特に重要な成果である疎性マトロイドの拡張定式化に対する成果を中心に成果の説明を行う．

Extended Formulations for Sparsity Matroids

二つの凸多面体 $P\subseteq\mathbb{R}^d$ および $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ が与えられているとする．ただし k は d 以上であるとする．このとき，ある直射影 π が存在して $\pi(Q)=P$ を満たすとき，Q が P の拡張であるという（図２参照）．さらに P の拡張がもつファセット数の最小値を，P の拡張複雑度という．近年，この拡張定式化が活発に研究されているが，本研究課題における拡張定式化の研究の意義は，計算複雑性の立場から線形計画法の問題解決能力の限界を明らかにするというものである．もしコンパクトな拡張定式化が存在するとすると，線形計画問題は効率的に解けるのでこの拡張定式化が求まれば元の問題も効率的に解けるということがわかる．逆に，もしコンパクトな拡張定式化が存在しないとすると，例えば「巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ」といった誤った P=NP の証明への対抗策となり有益である．つまり，最適化の観点から眺めると，拡張定式化の上界・下界のどちらも研究する意義があると言える．

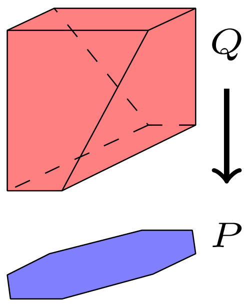

図２．拡張定式化の図

近年，いくつかの多面体に関して多項式サイズの拡張定式化を持たないと示されている．例えば，ハミルトン閉路や安定集合，最大カット，そして多くの NP 困難問題に付随する多面体に関して拡張定式化を持たないと示されている．さらに，多項式時間で解くことのできる問題の中でも，マトロイドや完全マッチングに付随する多面体は拡張定式化を持たないと示されている．本論文ではこのマトロイド多面体に注目した．何故ならばマトロイドは理論上・応用上共に非常に重要な概念だからである．実は，マトロイド多面体の中に拡張定式化を持たないものがあるということは示されているが，実際にはどのようなマトロイドなのかは不明である．この問題に関連して，本論文では疎性マトロイドに注目する．疎性マトロイドは，全域木全体の族や全域木の直和の族の一般化であり，さらに構造物の剛性と非常に深い関わりがある．本論文ではこの疎性マトロイドが多項式サイズの拡張定式化を持つことを示した．

A Weighted Linear Matroid Parity

Algorithm

多項式時間解法を有する代表的な組合せ最適化問題として知られるグラフのマッチング問題とマトロイドの交叉問題との共通の一般化として1970年代にLawlerによって導入されたマトロイド・パリティ問題は，一般のマトロイドに関しては，多項式時間解法が存在し得ないが，マトロイドが行列表現を持ち，重みが一様な場合には，多項式時間解法が存在することが，Lovasz（1980年）によって示された．本論文では，行列表現を持つ線形マトロイドに関して，重み付きのマトロイド・パリティ問題を解く最初の多項式時間アルゴリズムを与えている．

On Problems as Hard as CNF-SAT

強指数時間仮説とは，任意の定数ε>0に対して，n変数充足可能性問題を$(2-\varepsilon)^n$時間で解くことができない，という仮説であり，充足可能性問題に対してしらみつぶし探索による解法が本質的に改善できないことを意味している．しかし，充足可能性問題以外にはしらみつぶし探索を改善できる問題が知られており，改善可能性と不可能性の間のギャップがよく分かっていなかった．

本研究では，強指数時間仮説を認めると，今までしらみつぶし探索以外の解法が見つかっていなかった諸問題に対しても，その改善が本質的に不可能であるということを証明した．そのため，KarpがNP完全性の証明のために用いた帰着列と同様の考え方を用い，指数時間計算時間可能性における新たな帰着列の構成法を考案した．そこには，「サイズをできる限り小さくするような帰着」を構成するという最適化の精神が現れている．

An FPTAS for the Volume Computation of 0-1 Knapsack Polytopes Based on Approximate Convolution

高次元凸体の体積計算の計算量は，線形計画法の楕円体法による多項式時間計算可能性の証明をはじめ，最適化理論における重要な研究対象のひとつである．「問題構造」×「計算下界」の視点においては，n次元凸体の体積に対する決定性の近似計算は，1.999^n倍の精度での近似不可能性が知られていた．

本論文では，「問題構造」×「計算上界」の視点から，高次元凸多面体の体積の決定性の近似計算に対してアルゴリズム解析の新たな技法を開発し，#P困難性の知られる0-1ナップサック多面体の体積計算に対して，決定性の多項式時間精度保証付き近似アルゴリズム（FPTAS）を与えた．

Finding a Stable Allocation in Polymatroid Intersection

２部グラフにおける安定結婚問題をポリマトロイド対に拡張して，安定割当の概念を導入して，その存在を証明すると共に，安定割当を見出す強多項式時間アルゴリズムを設計した．

Exact and Approximation Algorithms for Weighted Matroid Intersection

最大重み共通独立集合問題とは，同じ台集合上に定義された二つのマトロイドが与えられたとき，その二つのマトロイドの共通の独立集合の中で重みが最大のものを求める問題である．この最大重み共通独立集合問題は，様々な問題が帰着できることからもわかるように非常に重要な問題であり，離散最適化の研究に置いて中心的な問題のひとつである．

本論文では，この最大重み共通独立集合問題と，重みがない場合つまり最大サイズ共通独立集合問題との計算時間のギャップに関する研究を行った．具体的には，与えらえた重みが小さい時は最大サイズ共通独立集合問題と同じ計算時間で解くことができることを示した．

上記の論文による成果に加え，本研究課題では，海外のトップ研究者を招聘し以下のようなワークショップも開催した．

ELC Workshop on Polyhedral Approaches: Extension complexity and pivoting lower bounds
June 14-19, 2013
ELC Workshop on Parameterized Algorithms
February 28-March 1, 2015
ELC School on Parameterized Algorithms
March 17-20, 2016

特に一つ目のワークショップは本研究課題の主結果に繋がるものであった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計77件）
(1) <u>S. Iwata</u> and Y. Kobayashi: **A Weighted Linear Matroid Parity Algorithm**, *Proceedings of the 49th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, to appear. 2017. 査読有

(2) <u>R. Belmonte</u>, F. Fomin, P. Golovach, M. S. Ramanujan: **Metric Dimension of Bounded Width Graphs**, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, to appear. 2017. 査読有

(3) E. Ando and <u>S. Kijima</u>: **An FPTAS for the Volume Computation of 0-1 Knapsack**

Polytopes Based on Approximate Convolution, *Algorithmica*, 76(4), 1245-1263, 2016. 査読有
doi:10.1007/s00453-015-0096-5

(4) M. Cygan, H. Dell, D. Lokshtanov, D. Marx, J. Nederlof, Y. Okamoto, R. Paturi, S. Saurabh, and M. Wahlström: **On Problems as Hard as CNF-SAT**, *ACM Transactions on Algorithms*, 12(3), Article No.41, 2016. 査読有
doi:10.1145/2925416

(5) S. Iwata, N. Kamiyama, N. Katoh, S. Kijima, and Y. Okamoto: **Extended Formulations for Sparsity Matroids**, *Mathematical Programming A*, 158(1), 565-574, 2016. 査読有
doi:10.1007/s10107-015-0936-8

(6) S. Iwata and Y. Yokoi: **Finding a Stable Allocation in Polymatroid Intersection**, *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1034-1047, 2016.査読有
doi: 10.1137/1.9781611974331.ch73

(7) C.-C. Huang, N. Kamkimura, and N. Kamiyama: **Exact and Approximation Algorithms for Weighted Matroid Intersection**, *Proceedings of the 27th Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 430-444, 2016. 査読有
doi: 10.1137/1.9781611974331.ch32

〔学会発表〕(計 112 件)
(1) Naoki Katoh, Optimal Sink Location Problems on Dynamic Networks, The 10th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, 2016 年 12 月 17 日, Hong Kong (中国)

(2) 来嶋秀治, 乱拓アルゴリズムの技法, ELC 秋学校, 2015 年 9 月 24 日, ホテル アルモニーテラッセ (岐阜県・岐阜市).

(3) 岡本吉央, 行列の分解と組合せ最適化問題の拡張定式化, 京都大学数理解析研究所共同研究 組合せ最適化セミナー, 2015 年 7 月 23 日, 京都大学 (京都府・京都市).

〔図書〕(計 3 件)
(1) N. Katoh, A. Shioura, and T. Ibaraki, Springer, Resource Allocation Problems, in Handbook of Combinatroial Optimization, 2nd edition, 2013, 897-2988.

(2) N. Katoh and A. Takizawa, Chapman & Hall/CRC, Emerging Pattern Based Analysis of Crime Spots and Rental Price, in Contrast Data Mining: Concepts, Algorithms and Applications, 2012, 337-350.

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）
〔その他〕
特になし

６．研究組織
(1)研究代表者
加藤　直樹（KATOH, Naoki）
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：40145826

(2)研究分担者
岩田　覚（IWATA, Satoru）
東京大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号：00263161

岡本　吉央（OKAMOTO, Yoshio）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授
研究者番号：00402660

来嶋　秀治（KIJIMA, Shuji）
九州大学・システム情報科学研究院・准教授
研究者番号：70452307

神山　直之（KAMIYAMA, Naoyuki）
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・准教授
研究者番号：10548134

ベルモント レミー（BELMONTE, Rémy）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・助教
研究者番号：80780147

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし