

令和 4 年 5 月 30 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H02054

研究課題名(和文)ミラー対称性予想とシンプレクティック幾何の展開

研究課題名(英文) Mirror symmetry conjecture and development of symplectic geometry

研究代表者

太田 啓史 (Ohta, Hiroshi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：50223839

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 32,550,000円

研究成果の概要(和文)：大域的なシンプレクティック幾何を研究する上で、曲面からの擬正則写像のなすモジュライ空間は重要かつ強力な手法を提供する。特に、ラグランジアン部分多様体に境界をもつ場合の研究は、境界がない場合に比べ難しい。本課題では、境界をもつ場合に、モジュライ空間での交叉理論を展開する上で必要となる仮想チェイン理論の基礎理論を、倉西構造を基に、汎用性のある形で確立した。実際にそれを、A無限大構造の幾何学的構成、複素幾何とシンプレクティック幾何のある対応を主張するミラー対称性予想のある場合の証明、ハミルトン微分同相群の構造に関する新規な知見を得るなど具体的なシンプレクティック幾何の問題に応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

解析力学に起源をもつシンプレクティック幾何学において、擬正則写像のなすモジュライ空間は大域的なシンプレクティック幾何を研究する上で重要かつ強力な手法を提供する。特に、ラグランジアン部分多様体に境界をもつ場合の研究は、境界がない場合に比べ難しい。本課題では、境界をもつ場合に、モジュライ空間での交叉理論を展開する上で必要となる仮想チェイン理論の基礎理論を、倉西構造を基に、汎用性のある形で確立した。倉西構造による我々の仮想チェインの基礎理論は、今後の大域的シンプレクティック幾何やミラー対称性予想の研究において基本的かつ強力な方法を提供し、多くの研究者に活発に利用されると考えられる。

研究成果の概要(英文)：The moduli space of pseudoholomorphic maps from a surface to a symplectic manifold provides us with an important and powerful method to investigate global symplectic geometry. Compared with the case when the domain surface has no boundary, it is much more difficult to study the case when it has boundary mapped to a Lagrangian submanifold. By this grant, we have established the foundation of the theory of virtual fundamental chain (including the case with boundary), based on the theory of Kuranishi structure, in order to develop the intersection theory on the moduli space. We apply the foundation to a geometric realization of A_{∞} structure and the mirror symmetry conjecture. For example, we proved a certain version of the mirror symmetry conjecture for any compact toric manifolds, and obtained new results on the structure of Hamiltonian diffeomorphism groups of certain symplectic manifolds.

研究分野：幾何学 シンプレクティック幾何

キーワード：シンプレクティック幾何 ミラー対称性予想 Floer理論 倉西構造 仮想基本チェイン 擬正則曲線
量子接続 A無限大構造

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

円盤からラグランジアン部分多様体を境界条件とする擬正則写像のモジュライ空間はラグランジアン Floer 理論およびミラー対称性予想において基本的かつ重要な対象であり、代表者は、深谷賢治氏、Yong-Geun Oh 氏、小野薫氏との共同研究により、ラグランジアン部分多様体を境界条件とする擬正則円盤のモジュライ空間を用いてラグランジアン Floer コホモロジー理論の障害と変形の基礎理論を構築していた(2009 年出版)。更に、その基礎理論を具体的なシンプレクティック幾何の問題に応用し、主にトーリック多様体内のトラスファイバーの場合に様々な結果を得ていた。これらを圏論的レベルで考察すること、および他の数学との関係特に特異点論や Frobenius 構造との観点から研究を深めることが重要となってきた。

一方、これらの研究には仮想基本チェインの理論が基本的な道具となる。世界的に種々のアプローチが提唱されている途上であったが、我々は倉西構造の理論による仮想基本チェインを用いて遂行していた。その有効性を鑑み、倉西構造による仮想チェイン理論を使いやすくするために基礎理論の整備を求める声が国際的に高まっていた。

2. 研究の目的

任意のコンパクトトーリック多様体に対する圏論的ミラー対称性を解明するために、一般のコンパクトシンプレクティック多様体に対し、その深谷圏の分裂生成判定条件を明らかにする。Liouville 多様体という扱いやすい開シンプレクティック多様体の場合に M. Abouzaid 氏により得られていた結果を、一般の開シンプレクティック多様体の場合に研究することに対応する。また、圏論的ミラー対称性の下で、より詳細な構造の対応を解明する。例えば、両者の間の Frobenius 構造の比較や、解析的な不変量の研究を行う。並行して、これらの数学を支える倉西構造による仮想基本チェイン理論の整備と拡張を、応用を念頭におきながら進める。

3. 研究の方法

代表者は、深谷氏、Oh 氏、小野氏とラグランジアン Floer 理論および倉西構造による仮想基本チェイン理論の研究に長年従事しており、引き続き連絡をとりながら国際共同研究を遂行していく。

研究集会を開催し、詳しく議論することにより、関連する数学の視野を広めつつその知見を深めていく。必要に応じて、少数の研究者を招聘し、専門的かつ技術的な側面も含めた集中的な講演を基軸とした研究会も計画する。

4. 研究成果

任意のコンパクトトーリック多様体のミラー対称性について、バルク変形を込めた量子コホモロジー環とラグランジアン Floer 理論から定まるポテンシャル関数の unfolding 変形を込めたヤコビ環との環同型および両者の内積の対応を示した論文が 2016 年に出版された。

また、シンプレクティック構造の符号を逆にする対合の固定点集合はラグランジアン部分多様体の典型的な例であるが、その場合の Floer 理論を展開し、変形障害理論の詳細を研究し特にシンプレクティック多様体の直積の対角線集合に対するラグランジアン Floer コホモロジーと元のシンプレクティック多様体の量子コホモロジーとの環同型を示した論文が出版された(2017 年)。

他に、ラグランジアン Floer コホモロジーのバルク変形を応用してバルク変形付きスペクトル不変量を導入し、ハミルトン微分同相群からの非自明な擬群準同型の非可算連続族が存在する例を発見するなど新規な成果を得た。

倉西構造による仮想基本チェイン理論の整備拡張については、CF 摂動を中心にして仮想基本チェインの構成のための抽象一般論を構築し汎用性のある形で整備した。その中で例えば、Hamiltonian Floer コホモロジーとラグランジアン部分多様体に付随する A 無限大代数の構成のために必要な、ファイバー積と compatible な倉西構造の族および摂動の族を構成するための抽象的な枠組みを与えた。その成果は 2020 年に Springer 社からリサーチモノグラフとして出版された。その成果を用いて、実際に擬正則円盤のモジュライ空間上に倉西構造を構成し仮想基本チェインの幾何学的実現を簡明に与える論文を発表した。以上は、代表者と深谷賢治氏、Yong-

Geun Oh 氏、小野薫氏との共同研究である。

本科研費でポスドク 2 名(田中祐二氏、三田史彦氏)を雇用した。その中で代表者は三田史彦氏との共同研究の成果として、フィルター付き A 無限大圏のバルク変形に対応する変形族に付随する有理型接続を周期的ホモロジーの付加パラメータ方向の微分も込めて構成し、開閉写像の下で Dubrovin の量子接続と両立することを代数的な枠組みの中で示した。また、三田氏は、Yoosik Kim 氏らとトーリック多様体の no-displaceable なトラスファイバーをトロピカル幾何の観点から研究し、社本陽太氏と Dubrovin 予想について半単純とは限らない場合に詳しい研究を行い成果を発表した。田中氏は、Richard Thomas 氏と Vafa-Witten 方程式の解から不変量を構成し成果を発表した。

その間、2015 年にミラー対称性予想とシンプレクティック幾何に関する国際研究集会、2016 年に higher residue に関する国際研究会、行列因子化に関する国際研究集会を主催し、海外の活発な若手研究者を招聘し、集中的な議論を行うことができ新しい方向性を見出すことができた。2019 年にはシンプレクティック幾何とミラー対称性に関する大規模な国際研究集会を開催し、情報交換とともに国際的な情報発信を行うことができた。一方、COVID-19 パンデミック以降予定していた研究会のいくつかはキャンセルすることになった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 15件／うち国際共著 10件／うちオープンアクセス 14件）

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 巻 -
2. 論文標題 Exponential decay estimates and smoothness of the moduli space of pseudoholomorphic curves	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1-146
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 巻 24
2. 論文標題 Construction of a linear K- system in Hamiltonian Floer theory	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Fixed Point Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 1-110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11784-022-00960-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 巻 260
2. 論文標題 Spectral invariants with bulk, quasi-morphisms and Lagrangian Floer theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1--266
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/memo/1254	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoosik Kim, Jaeho Lee, Fumihiko Sanda	4. 巻 30
2. 論文標題 Detecting non-displaceable toric fibers on compact toric manifolds via tropicalizations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1--40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X19500034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroshi Ohta, Fumihiko Sanda	4. 巻 16
2. 論文標題 Meromorphic connections in filtered A categories	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 515--556
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2020.v16.n3.a7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Fumihiko Sanda, Yota Shamoto	4. 巻 70
2. 論文標題 An analogue of Dubrovin's conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ann. Inst. Fourier (Grenoble)	6. 最初と最後の頁 621--682
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/aif.3321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 巻 22
2. 論文標題 Construction of Kuranishi structures on the moduli spaces of pseudo holomorphic disks: I	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Surv. Differ. Geom.	6. 最初と最後の頁 133--190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 巻 14
2. 論文標題 Shrinking good coordinate systems associated to Kuranishi structures	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Symplectic Geom.	6. 最初と最後の頁 1295-1310
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/JSG.2016.v14.n4.a10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono,	4. 巻 21
2. 論文標題 Antisymplectic involution and Floer cohomology	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 1-106
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/gt.2017.21.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 巻 376
2. 論文標題 Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Asterisque	6. 最初と最後の頁 1-340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fumihiko Sanda	4. 巻 2021
2. 論文標題 Computation of quantum cohomology from Fukaya categories	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not. IMRN	6. 最初と最後の頁 769-803
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnaa089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuuji Tanaka	4. 巻 31
2. 論文標題 On the moduli space of Donaldson-Thomas instantons	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Extracta Math	6. 最初と最後の頁 89-107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuuji Tanaka	4. 巻 68
2. 論文標題 Some boundedness properties of solutions to the Vafa-Witten equations on closed 4-manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Q. J. Math	6. 最初と最後の頁 1203-1225
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmath/hax015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuuji Tanaka, Richard Thomas	4. 巻 13
2. 論文標題 Vafa-Witten invariants for projective surfaces II: semistable case	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Pure Appl. Math. Q.	6. 最初と最後の頁 517-562
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2017.v13.n3.a6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yuuji Tanaka, Richard Thomas	4. 巻 29
2. 論文標題 Vafa-Witten invariants for projective surfaces I: stable case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Algebraic Geom.	6. 最初と最後の頁 603-668
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/738	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計24件 (うち招待講演 24件 / うち国際学会 15件)

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Meromorphic connection in A_{∞} category
3. 学会等名 Special session on 'SYZ Mirror Symmetry and Enumerative Geometry', AMS Sectional Meeting, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Complete partition and application to autoequivalences
3. 学会等名 International Conference on ``Trends in Modern Geometry 2017" Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Complete partition and application to autoequivalences
3. 学会等名 PRIMA (Pacific Rim Mathematical Association) third congress, Mexico (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Braid group, free group and autoequivalence
3. 学会等名 Second BICMR and IBS-CGP Joint Symplectic Geometry Workshop, Beijing, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 探検 深谷圏
3. 学会等名 日本数学会 企画特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Higher residue pairings in Lagrangian Floer theory
3. 学会等名 International Workshop on "Higher Residue Week" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 深谷圏とミラー対称性予想
3. 学会等名 第63回トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Floer Theory and Mirror Symmetry 1
3. 学会等名 Summer School 「ミラーシンメトリーの数理と物理」 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Floer Theory and Mirror Symmetry 2
3. 学会等名 Summer School 「ミラーシンメトリーの数理と物理」 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Floer Theory and Mirror Symmetry 3
3. 学会等名 Summer School 「ミラーシンメトリーの数理と物理」 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Complete partition and application to autoequivalence
3. 学会等名 BICMR and IBS-CGP Joint Symplectic Geometry Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Generation criterion for the Fukaya category
3. 学会等名 FNRS-JSPS Workshop on New Techniques in Symplectic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Trace map in cyclic A_{∞} category
3. 学会等名 International Conference on "Symplectic Geometry and Mathematical Physics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Lagrangian intersection Floer theory and singularity theory
3. 学会等名 Seminar in Kagawa University (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 1-loop partition and open closed map in Lagrangian Floer theory
3. 学会等名 Conference on ``Geometry, Topology and Physics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Lagrangian Floer theory and categorical Saito theory
3. 学会等名 Workshop on "Gromov-Witten theory, Gauge Theory and Dualities" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 深谷圏の生成判定
3. 学会等名 第11回代数、解析、幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 On meromorphic connections in A category
3. 学会等名 Workshop on 'Stability Condition, Frobenius Manifold and Mirror Symmetry' (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Ohta
2. 発表標題 Analytic aspect of Fukaya category
3. 学会等名 Mathematical Society of Japan and Korean Mathematical Society Joint Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Fumihiko Sanda
2. 発表標題 Pairings of Hochschild homology of Fukaya categories
3. 学会等名 Higher Residue Week, 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Fumihiko Sanda
2. 発表標題 An analog of the Dubrovin conjecture
3. 学会等名 Workshop on mirror symmetry and related topics, Kyoto 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Fumihiko Sanda
2. 発表標題 An analog of the Dubrovin conjecture
3. 学会等名 CGP Seminar, IBS Center for Geometry and Physics, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Fumihiko Sanda
2. 発表標題 Meromorphic connections in filtered A categories
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 発行年 2016年
2. 出版社 Societe Mathematique de France	5. 総ページ数 340
3. 書名 Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds	

1. 著者名 Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 638
3. 書名 Kuranishi structures and virtual fundamental chains	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	小野 薫 (Ono Kaoru) (20204232)	京都大学・数理解析研究所・教授 (14301)	
連携研究者	菅野 浩明 (Kanno Hiroaki) (90211870)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授 (13901)	
連携研究者	高橋 篤史 (Takahashi Atsushi) (50314290)	大阪大学・理学研究科・教授 (14401)	
連携研究者	入谷 寛 (Iritani Hiroshi) (20448400)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	
連携研究者	野原 雄一 (Nohara Yuichi) (60447125)	明治大学・理工学部・准教授 (32682)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計6件

国際研究集会 Geometry and Everything, Fukaya 60	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 International workshop ``Higher Residue Week, 2016"	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 International workshop ``Matrix factorization and related topics, 2016"	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 Mirror Symmetry and Symplectic Geometry, Kyoto 2015	開催年 2015年～2015年
国際研究集会 International workshop Quantum Singularity Theory and Mirror Symmetry	開催年 2015年～2015年

国際研究集会 East Asia Symplectic Conference IV, Hong Kong	開催年 2015年～2015年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Simons Center for Geometry and Physics			
韓国	IBS Center for Geometry and Physics			