

令和元年6月20日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H02055

研究課題名(和文) 離散幾何解析学の進展

研究課題名(英文) The development of discrete geometric analysis

研究代表者

砂田 利一 (Sunada, Toshikazu)

明治大学・総合数理学部・専任教授

研究者番号：20022741

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、数学的結晶理論のトピック、中でも最近の系統的結晶デザインの発展に触発されて、「標準的結晶モデル」、「タイト枠」、「グラスマン多様体の有理点」、「2次の不定方程式系」の間の興味深い関係について探求した。核となる対象は、結晶的タイト枠であり、これはルート系の一般化である。さらに、最近発展しつつある tropical geometry との関連を調べ、結晶の標準モデルがアーベル・ヤコビの写像の離散類似として説明されることを見出した。これに加えて、準結晶の理論にも踏み込み、一般化されたリーマン和を定式化することにより算術的に定義されたいくつかの離散集合は準結晶となっていることを確かめた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、物質科学に密接に関連しており、特に結晶と準結晶の数学的理論を通して、結晶デザインの系統的方法を与えることにより、現実の社会に貢献している。

研究成果の概要(英文)：In this research, I treated several topics in mathematical crystallography. Especially motivated by the recent development in systematic design of crystal structures, I discussed interesting relationships among seemingly irrelevant subjects; say, standard crystal models, tight frames in the Euclidean space, rational points on Grassmannian, and quadratic Diophantine equations. The central object in this study is what I call crystallographic tight frames, which are considered a generalization of root systems. I also made a remark on the connections with tropical geometry, a relatively new area in mathematics, specifically with combinatorial analogues of the Abel-Jacobi map and Abel's theorem.

What is more, I explained how the idea of Riemann sum is linked to other branches of mathematics; for instance, some counting problems in elementary number theory and the theory of quasicrystals, the former having a long history and the latter being an active field still in a state of flux.

研究分野：離散幾何解析学

キーワード：位相的結晶 一般化されたリーマン和 算術的準結晶 結晶的tight frame

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

離散幾何解析学の基礎から応用に向けて、これまで多くの成果を挙げてきたが、さらなる進展を目指すため、周期的とは限らないユークリッド空間の中の離散集合の構造に目を向け、その分布の様子を調べることを所期の目標とした。その背景には、離散幾何解析学の応用として、結晶構造の数学的理論の構築に成功したことがある。すなわち、結晶の周期構造に着目して、「位相的結晶」を有限グラフのアーベル被覆グラフとして定式化し、その周期的実現の特別な場合である「標準的実現」を最小原理を用いて定義することにより、新しい結晶デザインの方法を提案した。興味深いことに、標準的実現は位相的結晶上の単純ランダムウォークに対する中心極限定理と密接に関連することがこれまでの研究で明らかになっている。これに加えて、大偏差定理も確立され、結晶格子のグロモフ ハウスドルフ極限との関連が明らかになった。

一般には、離散集合の構造は多種多様であって、周期構造(結晶構造)、準結晶構造、アモルファス構造に大別される。準結晶構造については、現状では様々な定式化があり、その1つであるポアソン型の構造に着目する。そうする理由は、整数論に關係する離散集合が、この構造を有することが期待されたからである。こうした観点から、ガウスの日記に記述された未発表定理(互いに素な自然数のペアに対する頻度の公式)や、原始的ピタゴラス数の漸近挙動など、興味深い研究に繋がる可能性があった。

さらに、量子ウォークや伊原ゼータの研究がこれまで行われてきたが、これらを高次元化するために離散幾何解析学の観点から発展させることが必要である。

2. 研究の目的

当研究は、離散幾何解析学のさらなる発展を目指し、幾何解析学の方法論が適用できる離散構造について扱うことを目的としている。特に、準結晶の数学的定式化及びグラスマン多様体の有理点の分布問題を扱うことを目的としている。準結晶の数学的定式化に関しては、ポアソン型の構造に焦点を絞り、整数論に關係する離散構造の例として、算術的に定義される離散集合を扱う。また、結晶の標準的実現に關係して、crystallographic tight frame の分類を行う。ここで、tight frame は元来 wavelet analysis に登場する概念であるが、標準的実現に付随する「building block」から得られるベクトルのシステムが格子群を生成することから定式化された概念が crystallographic tight frame である。この概念はリー群やリー環の分類に現れるルート系の一般化である。ルート系は完全に分類されており、このことから crystallographic tight frame についても分類を目指すことが考えられる。

3. 研究の方法

当該研究では、これまで蓄積してきた離散幾何解析学の成果と方法論を適用するのはもちろん、準結晶の研究では、一般化されたリーマン和、ポアソンの和公式、包含排除の原理に付随する和公式などを使って、原始的ピタゴラス数と原始的アイゼンシュタイン数に關係する漸近挙動を研究する。また、crystallographic tight frame の研究では、グラスマン多様体の有理点の分布を、研究代表者が導入した「高さ (height)」関数を使って研究する。

4. 研究成果

[1] 準結晶の数学的定式化については、従前の定式化に拘らず、新しい定式化を行った。これを原始的格子点、原始的ピタゴラス数に付随する離散集合に適用し、前者についてはポアソン型の近準結晶、後者についてはポアソン型の準結晶であることが確認された。証明で重要な役割を果たしたのが、包含排除の原理を適用して得られる和公式と、一般化されたリーマン和に対する極限公式である。さらに、これらの結果を用いて、ガウスの定理及び原始的ピタゴラス数に關係する離散集合の分布と極限定理を確立した。年度内には終了しなかったが、原始的アイゼンシュタイン数についても同様な結果が得られている。

[2] crystallographic tight frame に関しては、その分類をグラスマン多様体の有理点の分布問題に帰着させた、このため、tight frame に關係する基礎的理論を確立し、2次の不定方程式と關係させることに成功した。副産物として、「大きい対称性」を有する結晶構造は標準的実現となっていることが証明された。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 10件)

T. Sunada, Generalized Riemann sums, in "From Riemann to Differential Geometry and Relativity", Editors: Lizhen Ji, Athanase Papadopoulos, Sumio Yamada, Springer (2017), 457-479 (査読あり)

T. Sunada, Topics on mathematical crystallography, in the proceedings of the symposium "Groups, graphs and random walks", London Mathematical Society Lecture Note Series 436, Cambridge University Press, 2017, 473-513 (査読あり)

T. Sunada, From Euclid to Riemann and Beyond, in "Geometry in History", Springer 2019年8月出版予定(査読あり)

- T. Tate, Quantum Walks in Low Dimension, In: P. Kielanowski, S. Ali, P. Bieliavsky, A. Odziejewicz, M. Schlichenmaier, T. Voronov (eds) Geometric Method in Physics, Trends in Mathematics, Birkhauser/Springer, Cham, 261-278, 2016 (査読有り)
- X. Luo and T. Tate, Up and down Grover walks on simplicity complexes, Linear Alg. Appl. 545 (2018) 174-206 (査読有り)
- T. Komatsu and T. Tate, Eigenvalues of Quantum Walks of Grover and Fourier Types, J. Fourier Anal. Appl. (2018), <https://doi.org/10.1007/s00041-018-9630-6> (査読有り)
- Yu. Higuchi and E. Segawa, Quantum walks induced by Dirichlet random walks on infinite trees. J. Phys. A:Math. Theor. 51 (2018), 075303(21pp). (査読有り)
- Yu. Higuchi and E. Segawa, The spreading behavior of quantum walks induced by drifted random walks on some magnifier graph. Quantum Inf. Comput. 17 (2017), 0399--0414. (査読有り)
- Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, Periodicity of the discrete-time quantum walk on a finite graph, Interdiscip. Inform. Sci. 23 (2017), 75--86. (査読有り)
- Y. Hayashi, Yu. Higuchi, Y. Nomura and O. Ogurusu, On the number of discrete eigenvalues of a discrete Schrodinger operator with a finitely supported potential, Lett. Math. Phys. 106 (2016), 1465--1478. (査読有り)

〔学会発表〕(計 15 件)

- T. Sunada, Generalized Riemann sums, Invited speaker of the conference "Geometry in History" held at Institut de Recherche Mathematique Avancee, University of Strasbourg, 2015 年
- T. Sunada, Generalized Riemann sums, Invited Talk at Issac Newton Institute, 2015
- T. Sunada, Generalized Riemann sums, Keynote address at Symposium of Geometry in 2015 held at Tokyo University of Science 2015 年
- T. Sunada, Creation of mathematics, Invited speaker of the 3rd Kyoto University-Inamori Foundation Joint Kyoto Prize Symposium at Kyoto University 2016 年
- T. Sunada, Generalized Riemann sums, Invited speaker of the Workshop on Discrete Analysis, at School of Mathematical Sciences and Shanghai Center of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai, China 2016 年
- T. Sunada, Arithmetic quasicrystals, Invited speaker of the "Curvatures of Graphs, Simplicial Complexes and Metric Spaces" Workshop at Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (TSIMF), China 2017 年
- T. Sunada, Crystallographic tight frames, Invited speaker of the 100th Encounter between mathematicians and theoretical physicists, "Geometry, Mathematics and Physics"; 7--9, September at Institut de Recherche Mathematique Avancee, Universite de Strasbourg et CNRS 2017 年
- T. Sunada, Discovery or Invention?, Award lecture for the Hiroshi Fujiwara Prize for Mathematical Sciences at Keio University 2017 年
- T. Sunada, Arithmetic tight frames, CMAA Monthly Seminar at Meiji University 2018
- 樋口 雄介, Combinatorial structure in the dictionary and the mental lexicon, 2019 Workshop on Text Mining and Discrete Spectral Analysis(招待講演), 2019 年, 近畿大学東大阪キャンパス ACT
- 樋口 雄介, グラフの幾何をもたらす作用素のスペクトル構造, RIMS 共同研究「量子ウォークと場の量子論における超対称性の数理」(招待講演), 2018 年, 京都大学数理解析研究所
- 樋口 雄介, Mental lexicon と Erdos-Renyi random graph model, 2018 Workshop on Text Mining and Discrete Spectral Analysis(招待講演), 2018 年, 甲南女子大学
- 樋口 雄介, 酔歩と量子ウォークのスペクトル幾何, 2017 鹿児島スペクトル幾何学研究会(招待講演), 2017 年, 鹿児島大学理学部
- 樋口 雄介, 文書分類に向けた点過程とスペクトル幾何, 2017 Workshop on Text Mining and Discrete Spectral Analysis(招待講演), 2017 年, 愛媛大学工学部
- 樋口 雄介, 1 次元 Szegedy walk の定常測度, 横浜国立大学理工学部 応用数学研究室セミナー, 2015 年, 横浜国立大学理学研究棟

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：楯辰哉
ローマ字氏名：Tatsuya Tate
所属研究機関名：東北大学
部局名：理学研究科
職名：教授
研究者番号（8桁）：00317299

研究分担者氏名：樋口雄介
ローマ字氏名：Yusuke Higuchi
所属研究機関名：昭和大学
部局名：教養部
職名：講師
研究者番号（8桁）：20286842

研究分担者氏名：赤間暘二
ローマ字氏名：Yoji Akama
所属研究機関名：東北大学
部局名：理学研究科
職名：准教授
研究者番号（8桁）：30272454

研究分担者氏名：阿原一志
ローマ字氏名：Kazushi Ahara
所属研究機関名：明治大学
部局名：総合数理学部
職名：教授
研究者番号（8桁）：80247147

研究分担者氏名：内藤久資
ローマ字氏名：Hisashi Naito
所属研究機関名：名古屋大学
部局名：多元数理科学研究科
職名：准教授
研究者番号（8桁）：40211411

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。