

令和 2 年 6 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03608

研究課題名(和文)代数解析と表現論

研究課題名(英文) algebraic analysis and representation theory

研究代表者

柏原 正樹 (Kashiwara, Masaki)

京都大学・高等研究院・特定教授

研究者番号：60027381

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,400,000円

研究成果の概要(和文)：代数解析に関しては、D'Agnolo氏と副解析層のラプラス変換が局所的に決定されることを位相的に導くことに成功した。表現論に関しては、量子座標環の団代数としての構造をそのモノイダル圏化を用いて研究した。モノイダル圏においては、団単項式がモノイダル圏の実単純加群と対応することを示した。これは、Hernandez-Leclercによって提唱された予想を解決したことになる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

表現論は、種々の数学的対象の対称性を研究する分野である。最近、幾何学、圏論、組み合わせ論など、様々な観点からの研究が進んでいる。研究代表者は、籠ヘッケ環をもちいて量子座標環のモノイダル圏化をおこない、量子座標環の団代数としての構造の解明に新しい観点を提供した。また、いろいろなアフィン量子群の間に今まで知られていなかった関係、例えば、その既約表現とテンソル積の分解係数が同じ族に属するアフィン量子群において一致することを見いだした。

研究成果の概要(英文)：As for algebraic analysis, I studied irregular holonomic D-modules with Andrea D'Agnolo. One of main results is that the Laplace transforms of subanalytic onstructible sheaves are determined by local data. The method is totally topological. As for representation theory, I studied the cluster algebra structure of the quantum coordinate rings by using its monoidal categorification. As a byproduct, I proved that the cluster monomials correspond to simple modules in the monoidal categorification. This result solves affirmatively the conjecture due to Hernandez-Leclerc. The key point of the proof is that a given monoidal cluster admits successive mutations once it admits the first-step mutations.

研究分野：代数解析

キーワード：籠ヘッケ環 団代数 モノイダル圏化 アフィン量子群 D加群 副解析層

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 不確定特異点をもったホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応の表現論への応用。

確定特異点型のホロノミーD-加群の理論の表現論への現代的応用は、研究代表者による Kazhdan-Lusztig 予想の解決 (M. Kashiwara, J-L. Brylinski, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math. 64 (1981) 387--410) によって始まったといつてよいであろう。

これは、研究代表者の確立した確定特異点型のホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応 (M. Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 20 (1984) 319--365) の理論をもちいる。リーマン・ヒルベルト対応は、代数的対象であるホロノミーD-加群と位相的对象である偏屈層の間の一対一対応を与えるものである。この理論によって、D-加群が代数と幾何をつなぐ架け橋となり、表現論にうまく応用されたのである。近年は、旗多様体、叢多様体の幾何もとりにこんで、表現論はますます大きく発展している。しかし、不確定特異点型ホロノミーD-加群は、フーリエ変換の形でいたる所に自然に現れるにもかかわらず、そのリーマン・ヒルベルト対応が知られていなかったため、いままでその応用は進んでいなかった。

最近、研究代表者は、確定特異点型ホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応を不確定特異点型ホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応に拡張することに成功した (A. D'Agnolo, M. Kashiwara, Riemann-Hilbert correspondence for holonomic D-modules, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 123 (2016), 69--197)。この対応において、ホロノミーD-加群に呼応する位相的対応物は、副解析層 (subanalytic sheaf) と呼ばれるものになる。この対応によって、ホロノミーD-加群の導来圏が、副解析層の導来圏に埋め込まれるのである。

Kazhdan-Lusztig 予想の解決において、確定特異点型ホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応が大きな役割を果たしたように、不確定特異点型のホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応は、将来の表現論に必須の道具となるであろうと期待されていた。

一方、確定特異点型リーマン・ヒルベルト対応は、BBDG (A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, Astérisque, 100, 1982) による perverse sheaf の半単純性定理と分解定理の結果を併用することにより、表現論の非常に深い結果をもたらしてきた。例えば、G. Lusztig による大域結晶基底の positivity が良い例である。

最近、望月拓郎は、BBDG の結果を大きく拡張し、ホロノミーD-加群に対する半単純性定理と分解定理を証明した (T. Mochizuki, Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules, Astérisque No. 340, 2011)。この結果とあわせれば、ホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応は、多くの分野に応用できると期待されていた。

(2) 代数のモノイダル圏化。

この研究の第二の目標は、代数のモノイダル圏化であった。いろいろな代数的構造の圏化 (categorification) は、盛に研究され始めた分野である。種々の代数的構造を、集合より豊富な構造をもった圏をもちいることにより、今までとらえ得なかった性質を研究するのが目標である。群や環などの乗法的構造を持ったものは、モノイダル圏 (或は, 2-category) をもちいて圏化できる。乗法に対応するのが、モノイダル圏におけるテンソル積の関手である。

最近、研究代表者は、R-行列をもちいることにより、モノイダル圏における単純性に関する結果を得た (Simplicity of heads and socles of tensor products, Compos. Math. 151 (2015), 377--396)。これを発展的にもちいれば、近年盛に研究されている Fomin-Zelevinsky によって導入されたクラスター代数をモノイダル圏を用いて研究することができると期待されていた。いままでのクラスター代数と圏の関係の研究は、例えば Buan-Iyama-Reiten-Scott (Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups, Compos. Math. 145 (2009) no. 4, 1035--1079) におけるようにクラスター代数の乗法的構造と圏の加法的構造を関連づけるものであった。しかし、クラスター代数の乗法的構造と圏の乗法的構造を関連づけようとする試みはあまりなされていなかった。

また、結晶基底と叢ヘッケ環、クラスター代数の関連も興味を持たれていたが、決定的な結果は得られていなかった。

2. 研究の目的

表現論は、種々の数学的对象の対称性を研究する分野である。古典的には、群をもちいて対称性をしらべていたが、最近では量子群などの新しい道具が生まれ、それまで扱えなかった対称性も扱えるようになり、幾何学、圏論、組み合わせ論など、様々な観点からの研究が進んでいる。

一方、研究代表者は、不確定特異点をもったホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応の証明に、最近、成功した。この理論は表現論にも将来応用できると期待される。

この研究計画においては

(1) 不確定特異点をもったホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応の表現論への応用。

(2) 表現のモノイダル圏化。

の2点に焦点をあてた研究が目的である。

3. 研究の方法

この研究は、多くの研究協力者の助力を得て行った。

(1) 不確定特異点をもったホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応の表現論への応用。
これについては、研究協力者の Andrea D'Agnolo 氏 (Padova 大学), Pierre Schapira 氏 (Paris VI 大学) とともにリーマン・ヒルベルト対応の理論と副解析層の研究をおこなった。この2名を京都に招くとともに、研究代表者も Paris を来訪した。

(2) 代数のモノイダル圏化

これについては、Myungho Kim 氏、Se-jin Oh 氏、Euiyong Park 氏と共同研究を行った。この3氏を何度も京都に招くとともに、研究代表者もソウルを何度も訪れた。

4. 研究成果

(1) 代数解析に関しては、D'Agnolo 氏と副解析層の研究を行った。副解析層に対して、近傍サイクル関手や消滅サイクル関手を定義しそれらの性質をしらべた。さらにそれとラプラス変換の関係を詳しく研究した。とくに、近傍サイクル関手と消滅サイクル関手がラプラス変換で入れ替わることを導いたのは、著しい結果である。また、Pierre Schapira 氏とともに、超局所層理論の観点から、パーシスタントホモロジーを研究した。この中で、層と層との間の距離を定義し、これが通常の距離の性質を満すことを示したのは大きな成果である。

(2) 表現論に関しては、Myungho Kim, Se-jin Oh, Euiyong Park と共同研究を行った。その対象は箆ヘッケ環と量子アフィン環である。この研究で、箆ヘッケ環の表現論を確立するとともに、前世紀から知られていた Weyl-Schur 双対性を極限まで拡張し、それを箆ヘッケ環の加群圏から量子アフィン環の加群圏への関手として捉える事に成功した。さらにこれらと、Fomin-Zelevinski によって導入された団代数との関連を研究した。最も著しい成果は、量子座標環の団単項式が大域結晶基底となることをしめしたことである。これは Hernandez-Leclerc によって提唱された予想であり、これを肯定的に解決したことになる。

この証明のキーポイントは、与えられたモノイダル団に対して、初回の変異が可能なら何度も変異を繰り返すことが可能であることを証明したことである。

また、Myungho Kim 氏との共同研究で、団代数の特筆すべき性質であるローラン現象がモノイダル圏化においても興味ある性質を導くことを示した。例えば、 g ベクトルのモノイダル圏的特徴付を与え、また、個々の団が最大可換族となることを導いた。

Se-jin Oh 氏との共同研究では、それまで知られていた ADE 型箆ヘッケ環と非ねじれ型アフィン量子群の関係を、ADE 型箆ヘッケ環とねじれ型アフィン量子群の場合まで拡張した。そこでは、ディンキン箆の折り返しが組み合わせ論的に重要な道具となった。また、Kim, Oh, Park との共同研究で、A 型と B 型のアフィン量子群の間に密接な関係があることを発見した。即ち、その両者の上の有限次元加群のつくるグロタンディック環が同型となり、しかもその対応において単純加群どうしが対応しようという驚くべき現象を見いだした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計16件（うち査読付論文 16件/うち国際共著 14件/うちオープンアクセス 16件）

1. 著者名 Kashiwara Masaki、Schapira Pierre	4. 巻 2
2. 論文標題 Persistent homology and microlocal sheaf theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Applied and Computational Topology	6. 最初と最後の頁 83 ~ 113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1007/s41468-018-0019-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 D'Agnolo Andrea、Kashiwara Masaki	4. 巻 339
2. 論文標題 A microlocal approach to the enhanced Fourier-Sato transform in dimension one	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1016/j.aim.2018.09.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Kashiwara Masaki、Park Euiyong	4. 巻 20
2. 論文標題 Affinizations and R-matrices for quiver Hecke algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1161 ~ 1193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI: 10.4171/JEMS/785	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Kashiwara Masaki、Kim Myungho、Oh Se-jin、Park Euiyong	4. 巻 328
2. 論文標題 Monoidal categories associated with strata of flag manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 959 ~ 1009
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1016/j.aim.2018.02.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho; Oh, Se-jin	4. 巻 31
2. 論文標題 Monoidal categorification of cluster algebras.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 349-426
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jams/895	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kashiwara, Masaki	4. 巻 52
2. 論文標題 Self-dual t-structure.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Publ. Res. Inst. Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 271-295
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/181	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho; Oh, Se-jin	4. 巻 22
2. 論文標題 Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras IV.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Selecta Math. (N.S.)	6. 最初と最後の頁 1987-2015
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-016-0267-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kashiwara, Masaki	4. 巻 11
2. 論文標題 Riemann-Hilbert correspondence for irregular holonomic D-modules.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Jpn. J. Math.	6. 最初と最後の頁 113-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11537-016-1564-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 D'Agnolo, Andrea; Kashiwara, Masaki	4. 巻 123
2. 論文標題 Riemann-Hilbert correspondence for holonomic D-modules.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.	6. 最初と最後の頁 69-197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10240-015-0076-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Tsuchioka, Shunsuke	4. 巻 711
2. 論文標題 Quiver Hecke superalgebras.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Reine Angew. Math.	6. 最初と最後の頁 1-54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2013-0089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre	4. 巻 22
2. 論文標題 Irregular holonomic kernels and Laplace transform.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Selecta Math. (N.S.)	6. 最初と最後の頁 55-109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-015-0185-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kahng, Byeong Hoon; Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Suh, Uhi Rinn	4. 巻 15
2. 論文標題 Dual perfect bases and dual perfect graphs.	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Mosc. Math. J.	6. 最初と最後の頁 319 ~ 335
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho; Oh, Se-jin	4. 巻 111
2. 論文標題 Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras III.	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Proc. Lond. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 420 ~ 444
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms/pdv032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Grantcharov, Dimitar; Jung, Ji Hye; Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho	4. 巻 17
2. 論文標題 Crystal bases for the quantum queer superalgebra.	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Eur. Math. Soc. (JEMS)	6. 最初と最後の頁 1593 ~ 1627
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JEMS/540	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho	4. 巻 164
2. 論文標題 Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, II.	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Duke Math. J.	6. 最初と最後の頁 1549 ~ 1602
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/00127094-3119632	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho; Oh, Se-jin	4. 巻 151
2. 論文標題 Simplicity of heads and socles of tensor products.	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Compos. Math.	6. 最初と最後の頁 377 ~ 396
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X14007799	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 柏原正樹
2. 発表標題 Quiver-Hecke algebras, quantum affine algebras and R-matrices
3. 学会等名 Representation theory, geometry, and quantization: the mathematical legacy of Bertram Kostant (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原正樹
2. 発表標題 Categorification of cluster algebras via quiver Hecke algebras
3. 学会等名 Interactions of quantum affine algebras with cluster algebras, current algebras and categorification (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原 正樹
2. 発表標題 Categorification of cluster algebras via quiver Hecke algebras
3. 学会等名 Conference Kyoto (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 柏原 正樹
2. 発表標題 R-matrices in quiver Hecke algebras and quantum affine algebras
3. 学会等名 Interactions between Representation Theory and Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 柏原 正樹
2. 発表標題 Quiver-Hecke algebras, R-matrices and Localization
3. 学会等名 Geometry and Representation theory of Algebraic groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原正樹
2. 発表標題 Categorification of quantum groups by quiver Hecke algebras, R-matrices and Cluster algebras
3. 学会等名 Combinatoire algebrique en theorie des representations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 柏原 正樹
2. 発表標題 Riemann-Hilbert Correspondence for Holonomic D-modules
3. 学会等名 The 16-th Takagi Lectures (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre	4. 発行年 2016年
2. 出版社 Cambridge University Press, Cambridge	5. 総ページ数 111
3. 書名 Regular and irregular holonomic D-modules. London Mathematical Society Lecture Note Series	

〔産業財産権〕

〔その他〕

柏原 正樹ホームページ
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kashiwara/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----