様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ５ 月 ２７ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｈ０３６１２

研究課題名（和文）ゼータ関数の統一性

研究課題名（英文）Uniformity of Zeta Functions

研究代表者
翁　林（WENG, Lin）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：６０３０４００２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　10,800,000円

研究成果の概要（和文）：まず、既約群とその極大放物部分群に付随する有理数体のゼータ関数を導入し、これらのリーマン予想を証明した。さらに、ゼータ関数の特殊統一性を確立した。副産物として、新しい数論的アデールコホモロジー理論を博士学生菅原氏との共同研究で発展させたと同時に、この新しいコホモロジー理論を類体論へ応用し、数論曲面に関する相互法則を発見した。
主要出版物として、長編の本 「Zeta Functions of Reductive Groups and Their Zeros」(「既約群のゼータ関数のそれらの零点」)を出版し、D.Zagier氏との二本の論文を名高の「米国科学アカデミー紀要」(PNAS) に発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
既約群に付随するゼータ関数および非可換ゼータ関数の導入及び研究は数学の中で著しく影響を与えている。実際、クレイ数学研究所の7つのミレニアム懸賞問題の一つのリーマン予想はリーマンゼータ関数の零点に関する問題である。我々の研究はリーマンゼータ関数を大きなフレームワークの中に置いて、ファミリー中の一種として考える。そのため、古典リーマンゼータ関数の零点の分布が高い階数の非可換ゼータ関数の零点の分布と繋いで、新しい研究の道を開いたと同時に、数学の理論の豊かさと数学研究方法の多様化を提供した。社会的羊達に群がるところの流行的な浅薄数学と違って、数学の本質は何処にあるかという根本的な問題に挑んでいる。

研究成果の概要（英文）：First, we introduce and study zeta functions for number fields associated to reductive groups and their maximal parabolic subgroups and establish their the Riemann hypothesis for Chevelley groups. Then we develop a special zeta uniformity theory for rank n non-abelian zeta functions and SLn zeta functions for both number fields, and function fields (with D. Zagier). As a by-product, with my formal phD student, K. Sugahara, we develop a new number theoretic adelic cohomology theory for arithmetic varieties using ind-pro topology, and as an application, we establish a new type of reciprocity laws for arithmetic surfaces and show that the first arithmetic adelic cohomology group for arithmetic surfaces are indeed finite, which offer a new type of intrinsic invariants for these surfaces. Among others, one big volume on 'Zeta functions of reductive groups and their zeros' of mine is published by the World Scientific and two joint papers with Zagier are published by the leading journal PNAS.

研究分野：代数

キーワード：非可換ゼータ関数　格子とその安定性　既約群　翁ゼータ関数　リーマン予想　Eisenstein級数　Ind-Pro 位相　数論的アデール コホモロジー

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９（共通）

１．　研究開始当初の背景

リーマン予想はクレイ数学研究所の７つのミレニアム懸賞問題の中の一つであって、リーマン ゼータ関数の零点に関する問題である。数学において、応用は沢山があるが、リーマン ゼータ関数は孤立した数学構造で、独特な性質を持っているので、本質的な研究進展が少なかった。実際、関連する研究は、リーマン予想を仮定した上で行ってきた。このままではこのテーマの研究が暗礁に乗り上げていくのは間違いない。 これを打ち解くために、我々は孤立したリーマン ゼータ関数を自然なフレームワークの中に置き、大きなファミリー中の一員として研究することによって、関連する構造を理解することができると考えた。2000 年頃、任意の自然数 n に対し、代表者が独自で階数 n の大域体の非可換ゼータ関数を導入することに成功した。特に、階数 n が１となる時、我々のゼータ関数は古典的リーマン ゼータ関数（より一般的に、代数体のデデキントゼータ関数）と一致することが分かったので、リーマン ゼータ関数は非可換ゼータ関数ファミリー中の一員とみなすことができるようになった。

我々の高階非可換ゼータ関数の導入は現代数学の理論の上に成り立ている。少し詳しく言うと、非可換高階ゼータ関数は、代数体に対して半安定格子のモジュライ空間と新しい数論的 cohomology 理論を用いて定義され, 有限体上の関数体に対して, 代数曲線上の半安定ベクトル束のモジュライ空間を用いて定義された。今までのいくつの自分の JSPS 研究プロジェクトを経って、我々は幾つの難しい現代数学理論、特に、Siegel-Langlands の Eisenstein 級数理論と Arthur の相対跡公式理論を用いて、２００６年頃、これらの高階非可換ゼータ関数は特殊線形群の構造と繋がっていることを予想した。さらに、２０１０年頃、我々は代数体上に定義された、特殊線形群を含むいわゆる既約群とその極大放物部分群に付随する最も一般的なゼータ関数を導入した。これらの研究から、ゼータ関数の特殊統一性予想を導入したと同時に、これらゼータ関数の研究の要として、代数体上定義された規約群とその極大放物部分群に付随するゼータ関数の零点に関する拡張したリーマン予想も提唱した。

当初、原始のリーマン予想と同じく、拡張したリーマン予想は異常に難しく、２０年ー５０年くらいの短い期間には絶対に解けないと考えていた。そのため、我々は、これらのゼータ関数を研究するとき、いわゆるゼータ関数の統一性に関する研究課題を中心に据え置くことを決めた。

高階非可換ゼータ関数と既約群のゼータ関数を導入した後、自分と自分の学生の研究以外、他の数学者も研究するようになった。その中で、特に注目すべきなのは２００６年頃、(米国 Michigan 大の) Lagarias 氏ー（名古屋大ー東大ー東工大の）鈴木氏、（韓国の延世大の）Ki 氏の階数２のゼータ関数に関するリーマン予想の証明だった。驚く事に、彼らの証明は明快なものだった。要するに、階数２以上の高階非可換ゼータ関数の定義の中に、新しい対称性を自然に持っている。ゼータ関数の特殊統一性を用いて説明すると、この新しい対称性は特殊線形群の群の構造から自然に対応する。そのため、高階非可換ゼータ関数は自然に有理型関数の対称分解を持っている。

しかし、一般的な高階非可換ゼータ関数のリーマン予想の証明は依然としてむずかしい。実際、高階非可換ゼータ関数の構造は異常に複雑だった。例えば、n は３以上の時、有理数体の階数 n の非可換ゼータ関数は $2^{n-3}(n+2)$ 個項を持つ。そのため、その後、幾つかの進展があったが　（例えば、2007 年、鈴木氏は階数３ゼータ関数のリーマン予想を証明した、２０１０年、Ki 氏は階数３ゼータ関数のリーマン予想を証明した）高階非可換ゼータ関数のリーマン予想の証明は想像以上に困難だった。

しかし、幾つかの研究を重ねて、２０１５年頃、Ki ー小森（立教大）ー鈴木３氏の共通研究の中、上の代数構造の複雑さを克服し、リーマン ゼータ関数の解析性質を用いて、有理数体の Chevelley 群とその極大放物部分群に付随するゼータ関数の拡大リーマン予想の証明をある自然に付随した群の不変量の非消滅に帰着した。つまり、我々のゼータ関数の拡大リーマン予想を解決するとき、これらの群の不変量の非消滅性は避けて通れない本質的困難があった。

この研究プロジェクトの計画の際、これらの新しい進展を私も知っていた。しかし、今までの研究から、上の不変量の非消滅性は既約群の代数構造だけではなく、幾何構造とも緊密に繋がる事も理解した。故に、時期尚早と判定したため、ゼータの統一性に関する課題を中心に置くことを決めた。無論、研究の方法から見れば、ゼータ関数の拡大リーマン予想とゼータの統一性に関する二つテーマがお互い緊密に繋がっている事が分かる。

２．研究の目的

この研究の目的は，数論と幾何における様々なゼータ関数の統一性に関連する基礎の研究, 新

しい構造の発見, 及びこれらの数論と幾何への応用の探求である。
（１）ゼータ関数の特殊統一性の研究, つまり, 1 次元大域体上の主 torsor の非可換ゼータと簡約群に付随するゼータが一致することを研究する。
（２）非可換と可換ゼータの統一性, 特に, 非可換ゼータ零点の Δ 関数の分布とリーマンゼータ零点の δ 関数の分布の統一性を発掘する。
（３）モチーフ玉河数予想で, 主安定束の研究での Atiyah-Bott による幾何的方法と Harder-Narasimhan による数論的方法を統一する．さらに, 任意体上曲線の主束の total mass と stable mass の統一的関係を確立する。
（４）異なる次元のゼータの統一性, 特に簡約群のゼータとそれらのループ群の類似性を発見し, さらに, それらの大域的曲面/局所的な曲線のリボン上にある主束の stack への応用を探求する。

３．研究の方法

ゼータ関数の特殊統一性の研究の中心的な位置を占めているのは、Lafforgue 氏の代数曲線上のベクトク束の Mumford 安定性と Arthur の関数体の adelic 環上に定義された一般線形群に関する解析切り捨て理論の同一性に関する結果である。実際、代数体に対し、我々はまず次のような Lafforgue 氏の結果の類似命題を証明した：数論曲線上の格子の Mumford 型の安定性と Arthur の代数体の adelic 環上に定義された一般線形群に関する解析切り捨て理論は同値である。そのため、 Mellin 変換を用いて、高階非可換ゼータ関数をある特殊 Eisenstein 級数の体積 1 の半安定格子の moduli 空間上の積分と書き表すことに成功した。その上に、Siegel-Langlands の Eisenstein 級数理論を用いて、この特殊 Eisenstein 級数を一般線形群の極小放物部分群の Levi 部分群上の定数関数に付随する Eisenstein 級数のある特定特異点超平面に沿った留数と書き表すことも実現した。そのため、Arthur の相対跡公式の理論を用いて、一般線形群に付随するゼータ関数及び既約群とその極大放物部分群に付随するゼータ関数を導入した上で、代数体に対し、次のゼータ関数の特殊統一性を確立した：階数 n の非可換ゼータ関数と特殊線形群 SL_n に付随するゼータ関数を一致させる。これらに対応して、任意の既約群 G に対し、まず、我々は数論的 G-torsor とその安定性を導入した。さらに、彼らの moduli 空間を作り出したと同時にその数論及び幾何的性質を研究した。その中、特に、放物帰納法を用いて、我々は代数体上の数論的 G-torsor の安定性と Arthur の代数体の adelic 環上に定義された既約群に関する解析切り捨て理論と一致することを確かめた。この両方の一致性を確認することで、基本的に、目的の（１）の部分が理解できた。実際、遥かに、想像を超えて、この結果に気付き、我々は上に説明した拡大リーマン予想を解決した。

拡大リーマン予想を確認することで、既約群とその極大放物部分群に付随するゼータ関数の零点の具体的分布の研究ができるようになった。ここで、Zagier 氏との共通研究で、楕円曲線に付随する高階非可換ゼータ関数のリーマン予想も証明した。この研究に触発して、有理数体の高階非可換ゼータ関数の零点の深層分布構造という概念を導入し、その上に、これらの零点の深層分布構造とリーマン ゼータ関数の零点の分布を緊密に繋がることを予想した。その中で、Armitage 氏のリーマン ゼータ関数の零点の分布と物理におけるの Fokker-Planck 方程式の関連の研究から、高階非可換ゼータ関数の零点の深層分布と Fokker-Planck 方程式に関連があると確信し、関連する研究を行った。

４．研究成果

4.1)　ゼータ関数

まず、自分独自で導入した代数体と関数体の高階非可換ゼータ関数及びもっと一般に、代数体と関数体の上に定義された既約群とその極大放物部分群に付随するゼータ関数間のお互いの関係及びそれらの零点の分布を研究した。その中で、当初の想像を遥かに超えて、我々のゼータ関数の零点に関するの拡大リーマン予想を証明したという重大な成果が得られた。同時に、階数 n の非可換ゼータ関数と群 SL_n に付随するゼータ関数の一致性、つまり、ゼータ関数の特殊な統一性予想も確立した。(代数体の場合は私自身は Eisenstein 級数を用いた解析方法で、関数体の場合は、Lie 群の代数構造を用いて、 D. Zagier 氏と共著の形で)。さらに、関数体のゼータ関数の特殊な統一性の研究から、代数体の我々のゼータ関数について、普段の一次分布以外に、零点の新しい振る舞い構造が存在することに気づいた。確認するために、有理数体の低階数非可換ゼータ関数の零点を具体的に計算した。その上で、既約群とその極大放物部分群に付随するゼータ関

数の零点のいわゆる２次分布と古典リーマンゼータ関数の零点の分布の関係性を予想したと同時に、これらの零点と数学物理、特に統計力学中の Fokker-Planck 方程式の関係を確立した。特に、一連の基礎部分の研究から、代数体上の数論的 G-torsor の安定性と Arthur の代数体の adelic 環上に定義された既約群に関する解析切り捨て理論と一致することが、放物帰納法を用いて、証明された。この結果は我々のゼータ関数の零点分布及び統一性の研究の中で、中心的な役割が果たしていると同時に、既約群の古典的還元理論を改めて安定性という主軸によって再構築した。

これらの研究の集大成として、２０１８年に、6+1 部 18+5 章から構成された長篇の本 ’ Zeta Functions for Reductive Groups and Their Zeros ’ を World Scientific 出版社から出版したと同時に以下の論文も書いた。２０２０年に、総合学術雑誌として、ネイチャー、サイエンスと並び重要な総合学術雑誌『米国科学アカデミー紀要』（PNAS) にゼータ関数に関する我々の論文二篇（D. Zagier 氏と共著）を発表した。

(1) L. WENG, *Zeta Functions for Reductive Groups and Their Zeros*, World Scientific (2018)

(2) L. WENG, D. Zagier, HIGHER RANK ZETA FUNCTIONS FOR ELLIPTIC CURVES, PNAS 117 (2020), no.9, 4546-4558

(3) L. WENG, D. Zagier, HIGHER RANK ZETA FUNCTIONS AND SL_n-ZETA FUNCTIONS FOR CURVES, PNAS 117 (2020), no.12, 6279-6281

(4) L. WENG, Zeros of Zeta Functions for Exceptional Groups of Type E (2017)

(5) L. WENG, Distributions of Zeros for Non-Abelian Zeta Functions (2018)

(6) L. WENG, Non-Abelian Zeta Function, Fokker-Planck Equation and Projectively Flat Connection (2019)

4.2)　符号理論

安定性はゼータ関数の研究の中において、重要な役割を果たしてきたが、この研究過程の中で、いわゆる古典的な代数幾何符号理論の自然的な拡張を代数曲線上の安定ベクトル束の理論と adelic 理論を用いると、より新しい、より深い代数幾何符号理論を構築することができることも確信した。結果として、我々は高い階数の非可換代数幾何符号理論を構築し、さらに、代数曲線上のベクトル束の拡張の adelic 理論を確立した。具体的な例として、いわゆる楕円曲線上の Atiyah 束に付随する高い階数の非可換代数幾何符号理論を詳しく説明し、導入した。

(7) L. WENG, Codes and Stability (2018)

(8) L. WENG, Extension Classes in Adelic Language (2018)

(9) L. WENG, Adelic Extension Classes, Atiyah Bundles and Non-Commutative Codes (2018)

4.3)　数論的 G-トルソーの可換化、交差コホモロジー及びラグランズ対応

ゼータ関数の研究の中、既約群 G に付随する安定 G-格子のモジュライ空間の理論をはじめ、Eisenstein 級数理論を経て、代数体のラグランズ対応に関するガロア群の理論を、局所体およびそのアデール上で定義された代数群の表現論および保型形式論に結び付ける非常に広汎かつ有力な予想の新しいアプローチを提唱できるようになった。より具体的に言うと、まず数論的 spectral 曲線 及び 数論的特性曲線を用いて、数論曲線上の半安定数論的 G-トルソーに対応する可換化理論を確立すると同時に、半安定数論的 G-トルソーに対応するモジュライ空間の交差コホモロジーを、Zucker の予想および放物還元理論を用いて、保形表現から誘導された L^2-コホモロジーの精密関係の予想も導入しできると同時に証明したい。こうすることによって、数論的 spectral 曲線及び 数論的特性曲線に関連する半安定数論的 G-トルソーの可換化の理論に付随する Galois 表現の側面とモジュライ空間の交差コホモロジーから得られた保形形式の側面に結びつく、代数体のラングランズ対応への新しい研究方法を模索することができる。つまり、この研究プロジェクトは次の四つのテーマから構成されている。

(a) まず、数論的 G-トルソーの可換化理論の確立に関して、代数曲線に関連する Higgs bundle、Hitchin fibration、spectral/camera 曲線などの数論幾何中の類似な構造を構築する。つまり代数

体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ に付随する数論曲線 $\overline{X} = \overline{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F}$ の枠組で、これらの数論幾何的類似物を作り出したい。
(b) 次に、数論的スペクトル/特性曲線上の可逆格子の直接像と、基数論曲線 $\overline{X}$ 上の半安定数論的 G-トルソーの関係を調べる。結果として、有限体上の曲線の場合と同様に、基数論曲線 $\overline{X}$ 上の半安定数論的 G-トルソーのモジュライ空間は、数論的スペクトル/特性曲線の一般化された数論的ヤコビアンと随伴する環面フィブレーションで表現される。
(c) さらに、交差コホモロジーに関する Mayer-Vietoris の完全系列および Looijenga と Saper-Stone によって証明された Zucker の予想に加え、我々が以前行った「非可換ゼータ関数」に関する研究から得られた数論曲線 $\overline{X}$ 上の半安定数論的 G-トルソーのモジュライ空間の放物還元理論と跡公式の Arthur 型の解析特徴告げの同値性から（この同値性は関数体に関する Lafforgue 氏の仕事の代数多体における我々の類似結果から得られる）、半安定数論的 G-トルソーののモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の交差コホモロジーと、$\mathcal{M}$ を含むコンパクト化された数論的商空間 $\overline{Q(G)} := \overline{G(F)\backslash G^1(\mathbb{A})/K}$ および G の放物部分群 P の Levi 部分群 M_P に関連する空間 $\overline{Q(M_P)}$ の交差コホモロジー (これらは、Zucker の予想により、付随する保型表現から誘導された L^2-コホモロジーと同じ) の精密関係を予想し、証明する。ただし、$\mathbb{A}$ は F の adelic 環であり、K は $G(\mathbb{A})$ の極大オープンコンパクト部分群である。
(d) 最後に、Ngo 氏の基本補題の証明と Drinfeld の階数 2 の cuspidal 表現の数え方を参照しながら、(a.b.c) に基づき, 数論曲線 $\overline{X}$ 上の半安定数論的 G-トルソーのモジュライ空間の交差コホモロジーと、$\overline{X}$ の Galois 被覆数論的特性曲線から誘導された Galois 群の表現の間に関係性を結ぶ。これを実現すれば、代数体のラングランズ対応への新しい研究方法を構築する事になる。

実際、昨年と一昨年の JSPS での科研費課題の申請の際に、我々はこれらを新しい研究プロジェクトの出発点として申請書を作成しましたが、審査員の中に理解する研究者がおらず、実現不能と評価され、不承認となりました。しかし、かれらの判断は大きな間違いであり、次の最近の私の論文の中に示したように、前記述のアプローチは末頼もしいものである。

(10) L. WENG, Arithmetic Characteristic Curves (2019)

(11) L. WENG, Intersection Homology of Moduli Spaces of Semi-Stable Arithmetic G -Torsors (2020)

(12) L. WENG, Arithmetic Spectral Curves (2021)

4.4)　数論的コホモロジー理論

高階非可換ゼータ関数を導入する際、idelic 元・可逆格子に関する数論的リーマン・ロッホの定理と数論的消滅定理を含む新しい数論的コホモロジー理論を構築した。同時に、当時の博士学生菅原広太郎氏と、数論的代数族に関する Parshin-Beilinson 流の新しい数論的 adelic コホモロジー理論を作り上げた。その上で、数論的曲面に関する類対論を研究し、新しい相互律を証明した。これらの仕事はロシアのステクロフ数学研究所 (Steklov Institute fo Mathematics) の Osipov 氏の仕事とも関連する。全編の理論のさらに詳しい説明は前述の本 'Zeta Functions for Reductive Groups and Their Zeros ’ の付録「Five Eassies on Arithmetic Cohomology」の中にも収録されている。

(13) K. Sugahara, L. WENG, Arithmetic Cohomology Groups (2015)

(14) K. Sugahara, L. WENG, H^1_{ar} for arithmetic surface is finite (2016)

(15) K. Sugahara, L. WENG, Arithmetic Central Extensions and Reciprocity Laws for Arithmetic Surface (2016)

4.5)　量子コンピュータ、量子計算と量子情報学

非可換ゼータ関数の零点の分布の研究から、量子力学をはじめ、量子コンピュータ、量子計算と量子情報学に興味を持つようになった。結果として、これらの基本理論を学習し、新しい量子コンピュータの理論の研究及びそれらの古典コンピュータへの影響を探求した。その中、特に、研究生施展氏とともに、ピーター・ショアの従来不可能であった素因数分解を高速量子アルゴリズムから誘発することで、古典コンピュータでの整数の素因数分解に関する新しい アルゴリズムを導入し、対応する c++ プログラムも実装した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 L. WENG, D. Zagier	４．巻 117(9)
２．論文標題 HIGHER RANK ZETA FUNCTIONS FOR ELLIPTIC CURVES	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America	６．最初と最後の頁 4546-4558
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1073/pnas.1912023117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 L. Weng, D. Zagier	４．巻 117(12)
２．論文標題 HIGHER RANK ZETA FUNCTIONS AND SLn -ZETA FUNCTIONS FOR CURVES	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America	６．最初と最後の頁 6279-6281
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1073/pnas.1912501117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 翁林
２．発表標題 Central Extensions and Reciprocity Laws for Arithmetic Surfaces
３．学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry 2016（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

〔図書〕　計1件

１．著者名 Lin WENG	４．発行年 2018年
２．出版社 World Scientific	５．総ページ数 555
３．書名 Zeta Functions of Reductive Groups and Their Zeros	

〔産業財産権〕

〔その他〕

論文　'L. WENG, Intersection Homology of Moduli Spaces of Semi-Stable Arithmetic G-Torsors'
https://www3.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/Poincare.pdf
論文　'L. WENG, Arithmetic Characteristic Curves'
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/eigen.pdf
論文　'L. WENG, Non-Abelian Zeta Function, Fokker-Planck Equation and Projectively Flat Connection'
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/Zeta&Hamiltonian(11).pdf
論文　'L. WENG, Codes and Stability'
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/codes2.pdf
論文　'L. WENG, Adelic Extension Classes, Atiyah Bundles and Non-Commutative Codes'
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/adelicext(I_r)code.pdf
Data on Zeta Zeros
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/zetas.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			