

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 21 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03613

研究課題名(和文) 表現論と特殊関数論の統合的展開

研究課題名(英文) Development of Representation Theory and Special Functions

研究代表者

落合 啓之(Ochiai, Hiroyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：90214163

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,100,000円

研究成果の概要(和文)：対称性を表す表現論と特別な関数を扱う特殊関数論は数学における異なる分野であるが、お互いの研究の成果を活かした発展がなされてきている。拡散現象を表すような分数階の微分方程式に対して、対称性がどうなるかを記述し、その対称性を活用して、微分方程式の解を特殊関数で表すことができた。また、3変数の関数を定める新しい微分方程式を発見し、その微分方程式を満たす解を特異点のある境界に制限した時に、共形場理論に現れる関数の積分変換で得られることを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

新しい関数を使うことで、今まで定性的にしか捉えられなかった現象(例えば天気が晴れ)を、定量的に記述すること(気圧が1018ヘクトパスカル)ができるようになる。我々の研究で取り扱った、3変数関数を1変数に制限したものや、分数階の微分方程式の対称性から生じた Mittag-Leffler関数などを使うことで、今までよりも詳細な記述が可能になった。例えば、関数が正負の符号を変える零点の位置は大切な情報だが、具体的な記述によって、計算機も援用することができ、それが可能になった。

研究成果の概要(英文)：We focus the bridge between Representation theory treating symmetry and Theory of special functions. We describe the symmetry of fractional differential equations in terms of Lie algebra. This symmetry enables us to give an explicit expression of solutions of such equations.

We find the new holonomic system with three variables, and the restriction to a singular line of a solution turns out to be an integral representation of a solution of Dotsenko-Fateev equation arising in conformal field theory.

研究分野：代数解析学

キーワード：表現論 特殊関数 超幾何関数 微分方程式 軌道分解 リー群 分数階微分

1. 研究開始当初の背景

表現論と特殊関数論は数学における異なる分野であるが、お互いの研究の成果を活かした発展がなされてきている。近年でも多変数の超幾何関数やアクセサリパラメータを持った微分方程式の研究などの事例が積み上がりつつある。また、分岐則などの研究も定性的議論から定量的な結果へと広がりつつあるが、そこで登場してきている特殊関数は今までのところ多くは1変数のものにとどまっている過渡的な段階にある。これらの状況から、特殊関数論を基盤的研究と応用との両側面から包括的に見直し、表現論やその他の分野へ活用することが望まれている段階にある。

2. 研究の目的

表現論に現れる特別な関数を拾い上げて特殊関数論として理解できるような基盤を作ることを目的とする。超幾何関数やその一般化に類するものは比較的良好に研究されてきているが、その範囲を超えた関数を積極的に取り上げて活用することが特徴である。

3. 研究の方法

表現論のさまざまな場面で現れる特別な関数のうち、既知の特殊関数で記述できるものや本質的に超越的なものをまずふるい落とす。そこで残った関数のうち、特殊関数として意味のあるものを選び出してパラメータ依存性、超越性、級数表示や積分表示などの各種の基本的な性質を論ずる。これらを統合し、最終的に再び表現論へフィードバックすることが研究の指針となる。

4. 研究成果

(1) Uuganbayar 並びに Dorjgotov(モンゴル国立大学)と共同で、分数階の微分方程式の対称性に関する共同研究を行った。分数階の微分作用素は積分作用素であり、積分区間の端点を固定するため平行移動不変性を持たない。しかしながら、特別な形の方程式は、特別な外部対称性を持つことがわかり、この対称性は、解の非自明な変換を与えたり、特殊解の記述に役立ったりする。我々は、方程式の一般的な対称性を記述する(非線形連立)方程式の導出、それを特別な形の方程式に適用した場合の対称性の分類、決定された対称性に対する方程式の分類、並びに、対称性を課した分数階の微分方程式の特殊解の記述を行った。これに関連して、Fox 関数など分数階の微分作用素に付随した特殊関数の研究も行った。先験的にはわからない対称性を持つ分数階の微分方程式も見つかっている。ここから派生する問題や課題も多く、軌道分解に関する問題も発生してきている。

(2) 伊師英之, P. Graczyk と共同で、錐に関連した積分やガンマ関数に関する研究を行った。正定値対称行列の空間を始め、対称領域では錐のガンマ関数は綺麗な形で書けることがいろいろな理論でわかっているが、それを越えた錐、例えば、幾つかの観測量が0であることがあらかじめわかっているような共分散行列に対応する積分が綺麗な表示を持つようなパラメータの条件が予想として与えられていた。我々の研究では、 Q_n と呼ばれるグラフに付随した積分に対して、その予想が成立することを証明することができた。外部パラメータに関する挙動の制御、既知の結果の再定式化と変数変換による活用など、共同研究の持ち味が発揮されたものと考えている。本年度は別のより込み入った錐に対して、超幾何積分を始めとする特殊関数に関する知見を統合したアプローチで、予想の成否を吟味した。その結果、超関数に対して予想を拡張する必要があることがわかった。

(3) 吉田正章らと、新しい3変数階数8のholonomic系を発見し、それを特異直線に特殊化して得られる特別な常微分方程式系を研究した(プレプリント, math.arXiv: 2005.04465)。得られた常微分方程式は今までに知られていない新しいものであり、これに関する研究が主テーマである。Middle convolution によって共形場理論に現れる Dotsenko-Fateev の微分方程式に移行すること、Gauss の超幾何微分方程式の外部テンソル積に移行することが、長い計算の末に見つかった。これらを利用し、あるいはこれらが発見する経緯で、パラメータに関する対称性、アクセサリパラメータの記述などが副産物として得られている。この論文の後半部分では、確定特異点における Frobenius 級数解の係数を一般超幾何関数 $4F_3$ で記述するという蛭子プログラムをこの方程式に対して実行し、アクセサリパラメータを持つ微分方程式の級数解の記述に成功している。今後は、モノドロミー表現の記述、既約性可約性の判定条件、昇降演算子の存在条件と具体形という大きな問題が残されており、これらに向けて研究を進めていく予定である。この共同研究は、微分方程式を方程式系と見る、微分作用素を扱う、解を重視する、という3つ異なる文化に育った人たちの立場のせめぎ合いだったと言える。

(4) 平岡、白井と共同で、周期格子のゼータ関数を隣接作用素の固有値や特性多項式を用いて記述した。その過程で、円分多項式をチェビシェフ型に拡張した多項式の系列を定義することに気

づき、新しくそのような多項式族を定義した。この多項式の分解を Galois 作用を見ることで与えた。多項式の次数が低い場合はこの分解が既約分解を与えているが、一般に Galois 作用で分解された多項式は既約とは限らず、更に分解される事例も見つかっている。完全な記述が望まれる発展的なテーマである。

(5) 超幾何関数の独立変数とパラメータが混在するタイプの関数関係式(蛭子彰仁による)の成立起源を蛭子理論とは異なる立場から考察した。新しく発見したのは、これらの関係式にもう一つ新しいパラメータを入れた関係式が存在することを証明できたことであり、新しい関係式を特殊化することで蛭子の関数関係式が得られる。新しい関係式は、従来から知られている昇降演算子を2次の有理式で2方向に編み上げたものと解釈することができるものである。この現象を一般化することは残された課題である。

(6) アフィン変換の良いパラメータ付け、つまり、補間・変形・形状解析・アニメーションに適したパラメータ付けはコンピュータグラフィックスにおける重要な問題の一つである。鍛冶との共同研究で、部分群を利用した分解を用いて、いくつかの場面で有効とするパラメータ付けを与えた。これらは行列に、あるいはリー群に値を持つ特殊関数とみなすことができる。

(7) コンパクトリー群のユニタリ双対の構造に依拠した Witten ゼータ関数の研究を黒川信重と行い、表現の次元だけでなく指標の情報を取り込んだ関数に対して、解析接続や関数等式などの特殊関数的な性質を調べた。応用として特殊値に関しても面白い数が見れることが現象として発見できた。

(8) 共変性を持つ微分作用素(Rankin-Cohen 型の微分作用素の一般化)の研究では、Zagier, 伊吹山, 久保など、他の研究者が得ている微分方程式系の holonomic 性や付随する不変量を調べることで、既存の方程式系との関係や対応を見る研究を行っている。表現の実現と制限に関する研究においては、小林俊行、久保利久、Pevzner の Rankin-Cohen 括弧に関する研究と落合が伊吹山知義、葛巻孝子と行った保形形式に作用する微分作用素の研究を結びつける作業に着手し、理論的な面に関して成果を得た。前者は1変数、後者は多変数であり、その点では後者が一般的であるが、表現の制限に関する枠組みにおいては前者が広く、双方の拡張としての意味を見いだすことができる。

(9) 別の起源を持つ問題として、CGにおける光と色を計算するレンダリング方程式に現れる積分計算が高速化されることが望まれているのであるが、その積分に現れる漸化式構造を母関数と特殊関数を使って統合的に理解し、明示公式を与えたり打ち切り誤差を精密化したりすることで高速化することを企図した。現在、エッジにあたる係数の母関数構造として従来知られていない新しいものを見つけることができた。

(10) 田中吉太郎、栄伸一郎と共同で、代用電荷法を用いた円領域上の修正ヘルムホルツ方程式のノイマン境界値問題に対する精度保証付き基本解近似解法に関する研究を行った(math.arXiv:2009.13892)。近似解の表示には表現論的なアイデアを使い、一方で、不等式評価では、Bessel 関数などに関する精巧な評価を用いて、区間分割を巧妙に行うことで、パラメータ付きの優級数で評価することに成功した。特殊関数としては既存の関数を用いるが、不等式評価に入れ込むときに非自明な組み合わせが必要であり、その部分が新しいノウハウとなると考えられる。

以上の個別の成果や結果を踏まえて、また、以前行った非可換調和振動子に現れる Heun 関数などを合わせて、特殊関数のあり方についてさまざまな観点から検討した結果をまとめ、一部は研究会で提示した。独立変数の取り方によらない内在的な定式化の抽出やパラメータ依存性に関して、いくつかの現象を横串を通して理解することができる基盤を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Hiraoka Yasuaki, Ochiai Hiroyuki, Shirai Tomoyuki	4. 巻 84
2. 論文標題 Zeta functions of periodic cubical lattices and cyclotomic-like polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 93-121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08410093	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Dorjgotov Khongorzul, Ochiai Hiroyuki, Zunderiya Uuganbayar	4. 巻 22
2. 論文標題 On solutions of linear fractional differential equations and systems thereof	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Fractional Calculus and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 479 ~ 494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/fca-2019-0028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Dorjgotov Khongorzul, Ochiai Hiroyuki, Zunderiya Uuganbayar	4. 巻 59
2. 論文標題 Exact solutions to a class of time fractional evolution systems with variable coefficients	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 081504 ~ 081504
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5035392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Dorjgotov Khongorzul, Ochiai Hiroyuki, Zunderiya Uuganbayar	4. 巻 329
2. 論文標題 Lie symmetry analysis of a class of time fractional nonlinear evolution systems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 105 ~ 117
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2018.01.056	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Graczyk Piotr, Ishi Hideyuki, Mamane Salha, Ochiai Hiroyuki	4. 巻 93
2. 論文標題 On the Letac-Massam Conjecture on cones QAn	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 16-21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.93.16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Shizuo Kaji and Hiroyuki Ochiai	4. 巻 9(3)
2. 論文標題 A concise parametrisation of affine transformation	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 SIAM J. Imaging Sci.	6. 最初と最後の頁 1355-1373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/16M1056936	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 落合啓之	4. 巻 2016-3
2. 論文標題 リーマンの球面	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 現代思想 2016年3月臨時増刊号 総特集=リーマン リーマン予想のすべて	6. 最初と最後の頁 176-185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 落合啓之
2. 発表標題 超幾何関数のリー環対称性について
3. 学会等名 研究集会「微分方程式と表現論」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 落合啓之
2. 発表標題 Nilpotent orbits in complex simple Lie algebras and prehomogeneous vector spaces
3. 学会等名 研究集会 “Representation theory of reductive Lie groups and algebras” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Ochiai
2. 発表標題 Zeros of Eulerian polynomials
3. 学会等名 研究集会「多重ゼータ関数の諸相」名古屋大学(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 落合啓之
2. 発表標題 Gamma factors of Selberg's zeta functions and absolute zeta functions
3. 学会等名 研究集会「多重三角関数とその一般化」神戸大学(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Ochiai
2. 発表標題 Covariant differential operators and Heckman-Opdam hypergeometric systems
3. 学会等名 International Conference for Korean Mathematical Society 70th Anniversary (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroyuki Ochiai
2. 発表標題 Gamma factors of Selberg's zeta functions and absolute zeta functions
3. 学会等名 Zeta Functions in Okinawa 2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroyuki Ochiai
2. 発表標題 Covariant differential operators and Heckman-Opdam hypergeometric systems
3. 学会等名 Workshop, Analytic Representation Theory of Lie Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 落合啓之
2. 発表標題 CG映像制作の数理
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会・応用数学分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Ken Anjyo, Hiroyuki Ochiai
2. 発表標題 An Introduction to Matrix Exponential for CG
3. 学会等名 Vic talk, Victoria University of Wellington (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Ken Anjyo and Hiroyuki Ochiai	4. 発行年 2017年
2. 出版社 Morgan and Claypool	5. 総ページ数 95
3. 書名 Mathematical Basics of Motion and Deformation in Computer Graphics, Second Edition	

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://user.math.kyushu-u.ac.jp/index.php?ochiai 落合啓之のページ
http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K003560/index.html 研究者情報（落合啓之）

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Symposium MEIS 2016: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 International Conference Geometry, Representation Theory, and Differential Equations	開催年 2016年～2016年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Anges 大学			
モンゴル	国立モンゴル大学			