

令和 4 年 5 月 25 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03616

研究課題名(和文)可積分幾何の新展開

研究課題名(英文)New development of the integrable geometry

研究代表者

宮岡 礼子 (Miyaoka, Reiko)

東北大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号：70108182

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,160,000円

研究成果の概要(和文)：極小曲面論に端を発し、それと深く関わる調和関数論、そして調和写像の記述に現れる2次元戸田方程式を介して可積分系理論へと研究が発展した。さらに波面の幾何学として現れる等径超曲面の可積分性を論じるにあたり、2016年に分類の最終課題の一つを解決し、残りもQ.S.Chiにより解決された。等径超曲面のガウス像Lは、シンプレクティック幾何学における極小ラグランジュ部分多様体の良い例を、しかも非等質な例を無限に与えている。ここから我々はLのフレアホモロジー論、特にそのハミルトン交叉性に考察を進め、単連結でない4例を除き、交叉のハミルトン非解消性を証明した。現在残る4例の解決に挑戦している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フレア理論はシンプレクティック幾何のラグランジュ部分多様体のホモロジー論、そのハミルトン変形による交叉数を評価するArnold-Givental予想で必要となる無限次元Morse理論として、Floerにより構築された。一般論としては深谷-Oh-太田-小野らが世界を牽引する研究を行っているが、フレアホモロジーの具体計算は特殊な場合を除き多くの困難を伴う。等径超曲面のガウス像という豊富な例は、非等質なものを無限に含むことから、非自明例として計算の価値がある。フレアホモロジーの計算が最終目標ではあるが、フレアホモロジーが定義できるか否かを定める重要な要件がハミルトン交叉非解消性である。

研究成果の概要(英文)：Starting from minimal surfaces, we developed the research into the theory of harmonic maps, which further goes to the theory of integrable systems through the 2D Toda equations. The theory of isoparametric hypersurfaces also appears as a geometry of wave fronts which concerns integrable systems. We solved one of the most difficult classification problems in 2016, and the remaining case was solved by Q.S.Chi. The Gauss image L of isoparametric hypersurfaces gives a rich family of nice examples of minimal Lagrangian submanifolds in certain symplectic manifold, including infinitely many non-homogeneous ones. We are interested in their Floer homology, and proved the Hamiltonian non-displaceability of L except for 4 non-simply connected cases. We are now challenging these 4 remaining cases.

研究分野：微分幾何学

キーワード：可積分幾何 等径超曲面 ガウス写像 フレア理論 交叉のハミルトン非解消性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

主として二つの課題を掲げた。

- (1) Ricci 曲率正のケーラー多様体 M の非コンパクト、完備な安定極小ラグランジュ部分多様体のトポロジーを調べ、特に曲面の場合の位相を明らかにする。
- (2) 球面の等径超曲面の分類について、残っていた主曲率の個数 $g=4,6$ のうち、 $g=6$ で重複度が 2 という困難な問題に取り組んできた。これを解決し、次の問題として、等径超曲面のガウス像のフレアホモロジーに関する研究、特にその第 1 段階としてそのハミルトン交叉非解消性を調べる。

なお、本研究課題は代表者の病気、及び covid-19 の蔓延により、2 度の繰越が認められ、2015-2021 年度に渡り行われた。

2. 研究の目的

どちらもシンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体の研究という点では共通しているが、(1) は通常の位相の解明であり、(2) はハミルトン変形後と元の交叉が生成するフレアホモロジーの解明である。後者は交叉数がラグランジュ部分多様体の Z_2 Betti 数の総和で下から抑えられるかという Arnold-Givental 予想への挑戦への第 1 歩である。

3. 研究の方法

(1) 安定極小曲面の研究は調和 1 形式の存在の観点から論じられ、非コンパクトな場合はそれを L_2 調和 1 形式に置き換えた議論が必要で、困難を伴う。調和 1 形式の存在は双対を考えると余次元 1 のサイクルが曲面を分割することに対応し、位相と深く関わるが、第 1 固有値の観点からは解析の問題でもある。

(2) 等径超曲面のガウス像は複素二次超曲面の極小ラグランジュ部分多様体である。等径超曲面の分類は終わったが、 $g=4$ では非等質なものが無限に現れるなど複雑な様相を呈する。等径超曲面の位相はよく知られているので、ガウス像 L の位相もある程度攻略可能と思われるが、 L は等径超曲面を巡回群で割ったかたちなので、通常の位相の計算においても困難を伴い、 $g=4,6$ については最終目標であるフレアホモロジーの計算まで道のりは遠い。そこで等径超曲面が球面束の積み重ねでできていることを利用して、Thom-Gysin の完全列を用いる新たな方法でホモロジーを計算し、それがガウス像にどう繋がるかを模索中である。フレアホモロジーの計算はさらに次の段階である。

4. 研究成果

(1) 一般に正曲率多様体には安定極小部分多様体は存在しにくい。他方、ケーラー多様体の複素部分多様体はホモロジー体積最小、つまり安定である。ラグランジュ部分多様体は複素部分多様体の対極にあるから、Ricci 曲率正のケーラー多様体の安定極小ラグランジュ部分多様体はあまり存在しそうにない。そこで第 1 の研究課題については、2014 年に安定極小ラグランジュ曲面 L の位相について 4 つの可能性しかないことを示し (Ueki-Miyaoka 2014)、さらにそれが二つに絞られると予想していた。つまり、 $L=S^2$ であるか、 $L=C$ (複素平面) かつ M の Ricci 曲率が下からある $b>0$ を用いて bg (g は計量) で抑えられるかのいずれかである。残る 2 つの可能性、 S^2 -3 点以上、または、 S^2 から一つの円板と 1 点以上を除いたもの、が起こらないことを予想しているが、 M を指定しない限り、一般の M に対する結論はまだ得られていない。

他方、安定性ではなく計量の情報から極小ラグランジュ部分多様体が特徴づけられないだろうか。球面の極小曲面は Ricci 条件という計量条件をみたと、低次元球面への分解が起こり、その本質が 2 次元戸田方程式に関わっているという事実がある (Miyaoka 1996)。これを極小ラグランジュ曲面で考える。特に M を 2 次元複素射影空間 CP^2 とするとき、その極小ラグランジュ曲面の計量は $1/3$ リッチ条件という条件をみとす。そこで一般次元の複素射影空間 CP^n で $1/3$ リッチ条件をみとす極小ラグランジュ曲面はどのようなものかという問題を考えた。この条件も可積分系に関わり、そこでは Tzitzeica 方程式が現れる。また余次元が上がると、計量に加え、ケーラー角の条件が効いてくる。今までの考察ではケーラー角にも条件をつけると、低次元複素射影空間の極小ラグランジュ曲面への分解がいえるが、条件が強すぎるので論文にはしていない。更なる研究で条件を弱めることを考えている。

(2) 第 2 の研究については、 S^{n+1} の等径超曲面 N の分類は終了し、相異なる主曲率の個数 $g=1,2,3,4,6$ に応じて、

$$g=1: N=S^n,$$

$$g=2: S^k \times S^{n-k},$$

$g=3$: Cartan 超曲面とよばれる Veronese 曲面 (FP^2 , $F=R,C,H,Cay$ の標準埋め込み) のチューブ、

$g=4$: OT-FKM 型とよばれる Clifford 環の表現に対応する無限個の等質、非等質な超曲面族と例外的 2 例 (Cecil-Chi-Jensen 2007, Chi 2020)、

$g=6$: 対称空間 $G_2/SO(4)$ のイソトロピー軌道 (Dorfmeister-Neher, 1982)、

または $G_2 \times G_2 / G_2$ のイソトロピー軌道 (Miyaka 2016)

である。特に最後のものは当研究課題の大きな成果のひとつと言える。

またこれらの (コ) ホモロジーは Munzner により計算されている (1983) が、Munzner の手法は、 S^{n+1} が等径超曲面 N の二つの焦部分多様体 N_{\pm} 上の円板束に分解されることを使っている。

他方、 N のガウス像 (N の点 x と、 x における単位法ベクトル n のはる有向平面を対応させる写像の像) L は $L=N/Z_g$ をみたし (Z_g は位数 g の巡回群) そのホモロジーの計算は g が素数でない
と困難である。そこでまず、 N のホモロジーの計算からやり直す。つまり、 N は球面上の球面束
の繰り返し (g 回) であることから、Thom-Gysin の完全列が適用可能である。この計算は全て終
わり、もちろん Munzner の結果と一致する。計算はすべて Z_2 係数で行う。これは N_{\pm} や L が必ず
しも向き付け可能とは限らないからである。

さて図形的な考察により、 L は射影空間上の球面束、あるいはその逆の繰り返しと見做す方法が
ある。主曲率の重複度が 1 であると、単連結性がない代わりに、 $S^1/Z_2=S^1$ が功を奏して、Thom-
Gysin を適用することが可能になり、部分的な進展を得た。

ここまでの成果は、フレアホモロジーの計算の前段階である、ハミルトン交叉非解消性へのアプ
ローチで、2016 年の 入江-Ma-M.-大仁田で示しきれなかった 4 つの場合が、まさに主曲率の重
複度が 1 のときなので、 $S^1/Z_2=S^1$ を用いることが意味をなす。

しかし、 L の (コ) ホモロジーがわかって、ハミルトン交叉解消性はまた別問題で、色々の手
法を試しているところであり、最終目標のフレアホモロジーの計算については、 $g=3$ 、重複度 1
と、 $g=4,6$ の場合が残っている。

(3) その他の研究成果

$g=4$ の等径超曲面では Clifford 環の表現である Clifford 系と対応する無限個の例が現れる。等
径超曲面は等径関数とよばれる多項式の球面上の等位面で得られる。この等径関数は Clifford
系を用いて、次数 4 の Cartan-Munzner 多項式で表され、具体表示が Ferus-Karcher-Munzner に
より与えられた。その形は直交群のシンプレクティック作用のモーメント写像と深く関わる。こ
れを明らかにしたのが 2013 年の論文であるが、これに関連する論文をいくつか書き、サーベイ
を行った。

海外講演として、London での UK-Japan Winter School, Madrid での Japan-Spanish workshop,
Firenze での Workshop "Complex manifolds and Lie groups", 中国では清華大学, 北京師範
大学, 重慶工業大学, Yau mathematical sciences center, 福建師範大学, また Seoul では
Ehwa 大学において、談話会, 小研究会で講演し、そのほかに国内講演も多数行った。2020-2021
年度は、代表者の病気, 及び covid-19 の蔓延により、こうした機会が無くなった。

論文執筆に加え、

現代幾何学への招待 (サイエンス社, 2016 年)

曲がった空間の幾何学 (ブルーバックス, 2017 年)

曲線と曲面の現代幾何学 (岩波書店, 2019 年)

極小曲面 (共立出版, 2022 年)

を出版した。次の書籍は電子化もされた。

現代幾何学への招待 電子版 (サイエンス社, 2019 年)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Reiko Miyaoka	4. 巻 64
2. 論文標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces of OT-FKM type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Science China Mathematics	6. 最初と最後の頁 1621-1628
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11425-020-1746-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Reiko Miyaoka	4. 巻 82
2. 論文標題 Moment map of the spin action and Cartan Munzner polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 ASPM	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08210001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Reiko Miyaoka and Yoshihiro Ohnita	4. 巻 6
2. 論文標題 Lagrangian Geometry of the Gauss Images of Isoparametric Hypersurfaces in Spheres	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceeding of the workshop "5th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups, Firenze	6. 最初と最後の頁 265-278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/coma-2019-0013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 -
2. 論文標題 ある過剰決定系の解の性質	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 2018 年度福岡大学微分幾何研究会報告集	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Iriyeh, H. Ma, R. Miyaoka, Y. Ohnita	4. 巻 48
2. 論文標題 Hamiltonian Non-displaceability of Gauss Images of Isoparametric hyper surfaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Bull. Lond. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 802-812
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms/bdw040	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Miyaoka,	4. 巻 -
2. 論文標題 Hamiltonian non-displaceability of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces (a survey)	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Math. and Stat. ``Hermitian-Grassmannian Submanifolds	6. 最初と最後の頁 83-99
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Miyaoka	4. 巻 183
2. 論文標題 Errata of ``isoparametric hypersurfaces with $(g,m)=(6,2)$ "	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Annals of Math.	6. 最初と最後の頁 1057-1071
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4007/annals.2016.183.3.7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 R. Miyaoka	4. 巻 1
2. 論文標題 Moment map description of the Cartan-Munzner polynomials of degree four	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Geometry and Analysis on Manifolds, In Memory of Professor Shoshichi Kobayashi	6. 最初と最後の頁 437-447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Miyaoka	4. 巻 52
2. 論文標題 Remarks on "The Dorfmeister-Neher theorem on isoparametric hypersurfaces"	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 373-377
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18910/57657	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 宮岡 礼子	4. 巻 2015
2. 論文標題 等径超曲面のガウス像の Hamilton non-displaceability について	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 湯沢研究会報告集	6. 最初と最後の頁 32-41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計19件(うち招待講演 19件/うち国際学会 9件)

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 等径超曲面のガウス像のラグランジュ交叉理論へのアプローチ
3. 学会等名 平戸微分幾何学研究討論会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka and Yoshihiro Ohnita
2. 発表標題 Lagrangian Geometry of the Gauss Images of Isoparametric Hypersurfaces in Spheres
3. 学会等名 5th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups", Firenze(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Lagrangian Geometry of the Gauss Image of Isoparametric Hypersurfaces
3. 学会等名 Ehwa University Mathematics Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Introduction to isoparametric hypersurface theory
3. 学会等名 Ehwa University, lecture (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 ある過剰決定系の解の性質
3. 学会等名 2018年度福岡大学微分幾何研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of certain Lagrangian submanifolds
3. 学会等名 The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry (Madrid, Spain) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 ラグランジュ交叉のフレアホモロジーに対する部分多様体論からのアプローチ
3. 学会等名 東大トポロジーリー群合同セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Approach from the hypersurface geometry to the Lagrangian intersection Floer theory
3. 学会等名 2017 Chongqing Workshop on Differential Geometry (重慶, 中国) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Approach from hypersurface geometry to the Floer theory on Lagrangian intersections, I
3. 学会等名 早稲田大学研究会 Differential Geometry and Differential Equations: the influence of Mirror Symmetry and Physics (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Exceptional values of the Gauss map of complete minimal surfaces I, II
3. 学会等名 Yau Math. Sci. Center: Geometric Analysis Seminar (北京, 中国) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 R.Miyaoka
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 UK-Japan Winter School “Singularities, Symmetries and Submanifolds ” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 首都大学東京幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 R.Miyaoka
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 Tsinghua University, Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 R.Miyaoka
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 Beijing Normal University, Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 等径超曲面のガウス像のHamiltonian non-displaceabilityについて
3. 学会等名 研究集会「複素幾何と幾何解析」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of the Gauss image of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 学習院・早稲田 幾何学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 等径超曲面のガウス像の Hamilton non-displaceability について
3. 学会等名 部分 多様体論・湯沢 2015(招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 中央大学談話会(招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 等径超曲面のガウス像のハミルトン交叉とフレアホモロジー
3. 学会等名 日本数学会東北支部会（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計5件

1. 著者名 宮岡礼子	4. 発行年 2022年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 264
3. 書名 極小曲面	

1. 著者名 宮岡礼子	4. 発行年 2019年
2. 出版社 岩波書店	5. 総ページ数 252
3. 書名 曲線と曲面の現代幾何学：入門から発展へ	

1. 著者名 宮岡礼子	4. 発行年 2019年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 142
3. 書名 現代幾何学への招待（電子版）	

1. 著者名 宮岡礼子	4. 発行年 2017年
2. 出版社 講談社	5. 総ページ数 238
3. 書名 曲がった空間の幾何学	

1. 著者名 宮岡礼子	4. 発行年 2016年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 134
3. 書名 現代幾何学への招待	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計8件

国際研究集会 第2回日中幾何学研究集会	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 Mini-workshop on Geometry	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 Mini-workshop with Prof. Zizhou Tang	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 第1回日中幾何学研究集会	開催年 2015年～2015年
国際研究集会 第3回日中幾何学研究集会	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 第4回日中幾何学研究集会	開催年 2018年～2018年

国際研究集会 第5回日中幾何学研究集会	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Workshop on the Isoparametric Theory	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	清華大学			
中国	北京師範大学			
中国	南開大学			