

令和元年5月9日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H03625

研究課題名(和文) ディリクレ形式が定める局所構造に基づく確率論および幾何学の展開

研究課題名(英文) Development of probability theory and geometry based on local structures induced by Dirichlet forms

研究代表者

日野 正訓 (Hino, Masanori)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：40303888

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,200,000円

研究成果の概要(和文)：確率論の研究において、確率微分方程式の理論と相補的な関係にあるディリクレ形式の理論の基礎的な進展を与えた。特に、ディリクレ形式が定める局所構造に基づく空間構造と確率論との関わりを1つの主要なテーマとする成果を挙げた。フラクタルのような、滑らかとは限らず、通常の微分概念が定まっていないような状況にも有用となることを念頭に置いた理論展開を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率微分方程式と相補的な関係にあるディリクレ形式の理論においては、一般論としては特段の空間構造を要求しないため適用範囲が広い反面、確率過程との対応づけが間接的であることに起因する困難や解決すべき問題が多く残されている。確率論分野の更なる発展のためには、このような基礎理論における問題点について進展することが重要であると考えられる。本研究ではこのような基本的な問題に関して成果を挙げ、複雑な構造を持つ空間における確率論の適用範囲を広げるといった大きな目標に対して寄与する意義を持つものである。

研究成果の概要(英文)：We gave basic progresses of the Dirichlet form theory, which is complementary to the theory of stochastic differential equations in the study of stochastic analysis. Primary results are based on a theme about the relation between the probability theory and the spatial structures on the basis of local structures determined by Dirichlet forms. Theoretical development was carried out by taking into consideration that it is useful for the situation in which the concept of usual differentiation is not defined like fractal sets, as well as for smooth spaces.

研究分野：確率論

キーワード：確率論 ディリクレ形式 局所構造 拡散過程

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率解析の研究は、黎明期では主に確率微分方程式の理論を元にした発展を遂げてきた。この理論においては、必然的に底空間は微分構造を持たなければならない。一方、近年の確率解析が対象とする空間は、無限次元空間やフラクタル集合など、通常の微分構造を持たないものへと伸張している。このような空間上の研究においては確率微分方程式以外の手段が必要となり、特に1990年代以降の研究では、より解析的な手法であるディリクレ形式の理論の有用性が強く認識されるようになってきた。ディリクレ形式は、一般論としては特段の空間構造を要求しないため適用範囲が広い反面、確率過程との対応づけが間接的であることに起因する困難や解決すべき問題が多く残されている。確率論分野の更なる発展のためには、このような基礎理論における問題点について進展することが重要であると考えられる。

2. 研究の目的

研究代表者および研究分担者がこれまでに行ってきた研究を発展させ、通常の微分構造を仮定しない空間にも適用可能な確率解析と幾何学の理論構築を主たる目的としながら、確率論の基礎理論の展開を図る。より具体的には、強局所ディリクレ形式が定義された一般の空間において(確率)微分方程式・微分幾何学の理論を展開したり、ラフパス理論とディリクレ形式の理論との融合を目指した研究を行う。これらは解析学や幾何学において異なる動機のもと行われてきた従来の研究と強く関連する一方で、解決すべき未開拓な課題も多い。他分野にも影響を与えつつ確率論分野の研究を発展させることを目指しつつ、従来統一的な扱いが困難であった、フラクタル等の複雑な構造を持つ具体的な空間についても深い解析を可能にするような理論の展開を目指す。

3. 研究の方法

研究分担者の桑江、会田、熊谷はそれぞれ幾何学、ラフパス理論、複雑な系の上の確率解析において造詣が深いため、それらとの関連が深いテーマを主に担当する。研究代表者の日野はフラクタル解析に関わるテーマを担当するとともに全体の研究統括を図る。その際、必要に応じて連携研究者の協力を求める。また、京都大学数理解析研究所で開催する国際研究集会“Stochastic Analysis”において、組織委員・招待講演者・外国人招聘担当者の役割を務め、本研究に関して国内外の研究者と情報交換・議論を行う。さらに、本研究課題に関連する国内研究集会が名古屋大学・岡山大学等で行われるため、適宜参加・講演を行い、参加者との情報交換および研究打合せを行う。研究代表者・研究分担者・連携研究者間の連絡に関しては、日常的にはemailを通じてやり取りを行い、研究集会の場などを利用して直接顔を合わせる機会を設けるよう努める。

4. 研究成果

- (1) ランダム単体複体の増大族の幾何構造に関する研究を行い、パーシステントホモロジーの生成元の生存時間和の漸近挙動について、クリーク複体過程を含む広い範疇のモデルで増大のオーダーを決定した。またある典型モデルについては主要項の係数まで決定した。これは研究計画時には予期しなかった方向性のテーマであるが、研究集会“Stochastic Analysis”で見聞した確率論と幾何学が関わる目新しい研究に関して、独自に研究を行い成果を挙げたものである。
- (2) 非対称双線型形式に付随する半群の短時間挙動の研究を行い、幾何構造を全く課さない空間上の強局所対称ディリクレ形式において、低階の摂動項が加わった場合に、積分型 Varadhan 評価が成り立つための十分条件を与えた。
- (3) 一般の状態空間における強局所正則ディリクレ形式に付随する指数の決定問題に取り組み、強い付加条件の下であるが、指数がスペクトル次元で上から評価されることを証明した。
- (4) 測度付き距離空間上の確率解析に関する研究を行い、1以下のパラメータ m についての Bakry-Emery リッチテンソルの下限条件に現れる関数に対する積分条件の下で、対応する拡散過程の保存性とフェラー性に関する結果を得た。また、1以下のパラメータ m についての非対称な Bakry-Emery リッチテンソルの下限条件の下での V -ラプラス作用素に関する比較定理を得た。更に、重み付きリーマン多様体に付随する m -Bakry-Emery リッチテンソルの $m \leq 1$ の場合でのラブラシアンと比較定理と、それに伴う種々の幾何学的性質を得た。
- (5) グリーン緊密な加藤クラス測度の異なる2つのクラスが一致することを、強フェラー性を用いずに絶対連続性条件だけで導出した。また、ファイマン・カツ半群のスペクトル半径の L^p -独立性について、全測度有限の条件を外して超縮小性の条件だけで成立することを示した。
- (6) ラフパス理論に関する研究を行った。確率微分方程式の場合と同様に、ラフ微分方程式の場合も Milstein 近似などの離散近似が存在する。これらの離散近似過程と真の過程を補間する補間離散近似過程を導入し、近似誤差を評価する研究を行った。
- (7) 回転対称負曲率多様体上のループ空間で定義されたディリクレ形式のスペクトルギャップの漸近挙動について研究し、スペクトルギャップをパスのエネルギー関数のヘッシアンを用いて決定した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 14 件)

- (1) Masanori Hino and Kouhei Matsuura, An integrated version of Varadhan's asymptotics for lower-order perturbations of strong local Dirichlet forms, *Potential Anal.*, vol. 48 (2018), 257-300. 査読あり, DOI: 10.1007/s11118-017-9634-x
- (2) Daehong Kim and Kazuhiro Kuwae, General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals, *Math. Ann.*, vol. 370 (2018), 1-37, 査読あり, DOI: 10.1007/s00208-017-1516-4
- (3) Shigeki Aida, Takanori Kikuchi, Seiichiro Kusuoka, The rates of the L^p -convergence of the Euler-Maruyama and Wong-Zakai approximations of path-dependent stochastic differential equations under the Lipschitz condition, *Tohoku Math. J. (2)* vol. 70 (2018), no. 1, 65-95. 査読あり, DOI: 10.2748/tmj/1520564419
- (4) Masanori Hino, Indices of Dirichlet forms [translation of *Sugaku* vol. 66 (2014), no. 1, 61-77], *Sugaku Expositions*, vol. 30 (2017), 187-205. 査読無し, DOI: 10.1090/suga/423
- (5) Mila, Kurniawaty, Kazuhiro Kuwae and Kaneharu Tsuchida, On the doubly Feller property of resolvent, *Kyoto J. Math.*, vol. 57 (2017), 637-654, 査読あり, DOI: 10.1215/21562261-2017-0009
- (6) Panki Kim, Takashi Kumagai, Jian Wang, Laws of the iterated logarithm for symmetric jump processes, *Bernoulli* vol. 23 (2017), no. 4A, 2330-2379, 査読あり, DOI: 10.3150/16-BEJ812
- (7) Masanori Hino, Some properties of energy measures on Sierpinski gasket type fractals, *J. Fractal Geom.*, vol. 3 (2016), 245-263. 査読あり, DOI: 10.4171/JFG/36
- (8) Daehong Kim, Kazuhiro Kuwae and Tawara Yoshihiro, Large deviation principle of generalized Feynman-Kac functionals and its applications, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 68 (2016), 161-197, 査読あり, DOI: 10.2748/tmj/1466172769
- (9) Shigeki Aida, Semi-classical limit of Schrödinger operators in infinite dimensional spaces [translation of *Sugaku* vol. 64 (2012), no. 3, 278-303]. With an appendix by the author. *Sugaku Expositions* vol. 29 (2016), no. 2, 203-226. 査読無し
- (10) Ruojun Huang and Takashi Kumagai, Stability and instability of Gaussian heat kernel estimates for random walks among time-dependent conductances, *Electron. Commun. Probab.* 2016, Vol. 21, paper no. 5, 1-11. 査読あり, DOI: 10.1214/15-ECP4347
- (11) Daehong Kim, Mila Kurniawaty and Kazuhiro Kuwae, A refinement of analytic characterization of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals, *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 59 (2015), 717-771, 査読あり, DOI: 10.1215/ijm/1475266406
- (12) Kazuhiro Kuwae, Stochastic calculus over symmetric Markov processes with time reversal, *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 220 (2015), 91-148, 査読あり, DOI: 10.1215/00277630-3335905
- (13) Shigeki Aida, Reflected rough differential equations, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 125 (2015), no. 9, 3570-3595. 査読あり, DOI: 10.1016/j.spa.2015.03.008
- (14) Shigeki Aida, Asymptotics of spectral gaps on loop spaces over a class of Riemannian manifolds, *J. Funct. Anal.*, vol. 269 (2015), no. 12, 3714-3764, 査読あり, DOI: 10.1016/j.jfa.2015.09.023

[学会発表] (計 32 件)

- (1) Shigeki Aida, On a certain class of path-dependent stochastic differential equations, *New Directions in Stochastic Analysis: Rough Paths, SPDEs and Related Topics*, 2019 年
- (2) Masanori Hino, Asymptotics of integrated Betti numbers for random simplicial complex processes, *Fractal Geometry and Stochastics 6*, 2018 年
- (3) Masanori Hino, Some properties of energy measures on the Sierpinski gasket, 2nd Hong Kong/Kyoto Workshop on "Fractal Geometry and Related Areas", 2018 年
- (4) Kazuhiro Kuwae, Green-tight measures of Kato class and compact embedding theorem for symmetric Markov processes, *Workshop on Random Matrices, Stochastic Geometry and Related Topics*, 2018 年
- (5) Kazuhiro Kuwae, Radial processes on $RCD^*(K, N)$ -spaces, *The AIMS Conference Series on Dynamical Systems and Differential Equations*, 2018 年
- (6) Kazuhiro Kuwae, Radial processes on $RCD^*(K, N)$ -spaces, *Stochastic Processes and its Applications*, 2018 年
- (7) Shigeki Aida, Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms, *Workshop on Mathematical finance and related issues*, 2018 年
- (8) Masanori Hino, Asymptotic behavior of lifetime sums for random simplicial complex processes, *Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017*, 2017 年
- (9) 日野正訓, ランダム複体過程における生存時間和の漸近挙動, ディリクレ形式と対称マル

コフ過程, 2017 年

- (10) Masanori Hino, An integrated version of Varadhan's asymptotics for lower order perturbations of strong local Dirichlet forms, Workshop "Dirichlet forms and their geometry", 2017 年
- (11) Kazuhiro Kuwae, Radial processes on $RCD^*(K, N)$ -spaces, GeoProba2017 in Luxembourg, 2017 年
- (12) Kazuhiro Kuwae, Radial processes on $RCD^*(K, N)$ -spaces, Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017, 2017 年
- (13) Kazuhiro Kuwae, Irreducible decomposition for Markov processes, Workshop on Markov processes and its geometric aspects, 2017 年
- (14) 桑江一洋, L^p -independence of spectral radius for generalized Feynman-Kac semigroups, マルコフ過程とその周辺, 2017 年
- (15) Shigeki Aida, Asymptotics of spectral gaps on loop spaces, Metric Measure spaces and Ricci curvature, 2017 年
- (16) Masanori Hino, Integrated version of Varadhan's asymptotics for first-order perturbations of strong local Dirichlet forms, The 8th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2016 年
- (17) 日野正訓, マルチングール次元の評価に関する一注意, 研究集会「マルコフ過程とその周辺」, 2016 年
- (18) 桑江一洋, Liouville property for harmonic maps between metric spaces, 仙台における偏微分方程式ワークショップ, 2016 年
- (19) Shigeki Aida, Reflected rough differential equations via controlled paths, 研究集会「Rough paths, Regularity Structures and Related Topics」, 2016 年
- (20) 会田茂樹, Support theorem for reflected diffusion processes, 確率論シンポジウム, 2016 年
- (21) Masanori Hino, On distribution of energy measures on the Sierpinski gasket, 研究集会「確率論と幾何学」, 2015 年
- (22) Masanori Hino, Toward stochastic differential calculus based on measurable Riemannian structures, Stochastic Analysis, 2015 年
- (23) Masanori Hino, On the distribution of energy measures on Sierpinski gasket type fractals, International Conference on Stochastic Analysis and Related Topics, 2015 年
- (24) Kazuhiro Kuwae, A refinement of analytic characterization of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals, 確率論シンポジウム, 2015 年
- (25) 桑江一洋, Liouville property for harmonic maps between metric spaces, 福岡大学微分幾何研究会, 2015 年
- (26) Kazuhiro Kuwae, Analytic characterization of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals and its applications, Stochastic Analysis and Applications, 2015 年
- (27) Shigeki Aida, Asymptotics of spectral gaps on loop spaces over a class of Riemannian manifolds, 確率論と幾何学, 2015 年
- (28) Shigeki Aida, On solutions to reflected rough differential equations, Stochastic Analysis, 2015 年
- (29) Takashi Kumagai, Heat kernel estimates and local CLT for random walk among random conductances with a power-law tail near zero, University of Bath Probability Seminar, 2015 年
- (30) Takashi Kumagai, Harnack inequalities and local CLT for the polynomial lower tail random conductance model, RIMS workshop "Stochastic Analysis", 2015 年
- (31) Takashi Kumagai, Anomalous random walks and diffusions in random media, International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics, 2015 年
- (32) Takashi Kumagai, Stability of heat kernel estimates and parabolic Harnack inequalities for jump processes on metric measure spaces, International Conference on Stochastic Analysis and Related Topics, 2015 年

[図書] (計 1 件)

- (1) 桑江一洋, 塩谷隆, 太田慎一, 高津飛鳥, 栗田和正, 最適輸送とリッチ曲率, 日本数学会数学メモワール, 2017 年, 総ページ数 141 頁(執筆担当 pp. 1-40)

6. 研究組織

(1) 研究分担者 (2015 年度~2018 年度)

研究分担者氏名: 桑江一洋

ローマ字氏名：(KUWAE, kazuhiro)
所属研究機関名：福岡大学
部局名：理学部
職名：教授
研究者番号 (8桁)：80243814

研究分担者氏名：会田茂樹
ローマ字氏名：(AIDA, shigeki)
所属研究機関名：東京大学
部局名：大学院数理科学研究科
職名：教授
研究者番号 (8桁)：90222455

研究分担者 (2015年度)
研究分担者氏名：熊谷隆
ローマ字氏名：(KUMAGAI, takashi)
所属研究機関名：京都大学
部局名：数理解析研究所
職名：教授
研究者番号 (8桁)：90234509

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。