

令和元年5月23日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H05436

研究課題名（和文）成層回転流体に現れる分散性と異方性の大域解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of dispersion and anisotropy in rotating stably stratified fluids

研究代表者

高田 了 (TAKADA, Ryo)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：50713236

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 7,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、成層回転流体の運動を記述する非線形偏微分方程式系に対する数学解析を行った。安定成層から生成される線形時間発展作用素に対する時間減衰評価および時空積分評価を導出し、その応用として3次元非粘性成層 Boussinesq 方程式の初期値問題に対する長時間一意可解性を証明した。特に、浮力周波数を無限大とする特異極限問題において、同方程式の長時間解である3次元速度ベクトル場が2次元 Euler 方程式の長時間解に収束することを示し、安定成層の効果による流れの異方化を数学的に証明することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大気や海洋などを代表とする大規模な地球流体の特徴として、流れの様相が密度成層と回転の大きな影響下にあらることが挙げられる。この密度成層と回転は、どちらも流れを2次元化する強い異方性を有することが知られている。本研究では、非線形偏微分方程式の数学解析の観点から、安定成層の影響による流れの異方化について考察した。成層 Boussinesq 方程式において浮力周波数を無限大とする特異極限として問題を定式化し、3次元速度ベクトル場の2成分化を数学的に証明することに成功した。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research project is the mathematical analysis for nonlinear partial differential equations describing the motion of incompressible rotating stably stratified fluids. We establish dispersive and space-time estimates for the linear propagator related to the stable stratification. As an application, we proved the long time existence and uniqueness of classical solutions to the initial value problem for the 3D stably stratified inviscid Boussinesq equations. In particular, we consider the singular limit of the strong stratification, and show that the long time classical solution converges to that of 2D incompressible Euler equations in some space-time norms.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：成層回転流体 Navier-Stokes 方程式 Euler 方程式 Boussinesq 方程式 分散型評価 時空積分評価
特異極限問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

大気や海洋などを代表とする大規模な地球流体の特徴として、流れの様相が密度成層と回転の大きな影響下にあることが挙げられる。この密度成層と回転は、どちらも流れを2次元化する強い異方性を有することが知られている。地球流体の運動に対する非線形偏微分方程式の観点からの数学解析は、Babin-Mahalov-Nicolaenko (1995, 1999) による研究があり、回転が単独で存在する場合および密度成層と回転が共存する場合が考察されている。周期境界条件を課した Navier-Stokes 方程式の初期値問題に対して、密度成層と回転の影響が大きいほど方程式系は安定となり、大きな初期速度場に対しても滑らかな時間大域解が一意的に存在することが証明された。この結果は、2次元における Navier-Stokes 方程式の大きな初期速度場に対する時間大域的適切性に対応しており、密度成層と回転の影響が流れを2次元化することを数学的に示唆したものである。本研究では、全空間において密度成層と回転が有する分散性に着目した研究を行う。成層と回転がそれぞれ単独で存在する場合と共存する場合を考察し、非線形方程式に対する初期値問題の適切性と特異極限問題の観点から、成層と回転が流れに与える分散性と異方性に関する数学解析を行う。

2. 研究の目的

本研究の目的は、大気や海洋などを代表とする大規模な地球流体において、密度成層と回転が流れの様相に及ぼす影響やその仕組みを、非線形偏微分方程式論の観点から数学的に解明することである。この問題は、Coriolis 力および Boussinesq 近似を取り入れた非圧縮性 Euler 方程式または非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題や定常問題として数学的に定式化される。密度成層および回転の影響によって流れに生じる分散性と異方性を、線形作用素のスペクトル解析や特異極限問題、および時間無限大における解の漸近挙動の観点から解析し、地球流体力学に対する数学的理論の構築を目標とする。

3. 研究の方法

成層が単独で存在する場合において、対応する線形時間発展作用素に対する時間減衰評価および時空積分評価を導出する。その上で、成層と回転がそれぞれ単独で存在する場合と共存する場合における線形作用素のスペクトルや分散性の相違を定量的に特徴付ける。また浮力周波数を無限大とする特異極限問題を考察する。極限方程式の時間大域的適切性、線形時間発展作用素に対する非斉次時空積分評価、および極限方程式の解からの摂動に対するエネルギー評価を確立することで、特異極限問題を数学的に解決する。

海外共同研究者との研究打ち合わせの訪問・招聘を行う。また国内外で開催される国際研究集会へ参加し、討論や意見交換、および最先端の研究成果やその解析手法に関する情報収集を行う。

4. 研究成果

(1) 成層流体に対する分散型評価

安定成層の影響を考慮した Boussinesq 方程式に関する研究を行った。特に、回転の影響が無く、安定成層のみが単独で存在する場合を考察した。安定成層に対応した歪対称線形作用素から生成される時間発展作用素に対して、最適な時間減衰評価および時空積分評価を導出した。またその応用として、同方程式の初期値問題に対する時間大域的適切性を証明した。特に、時間大域解の一意的存在を保証する初期温度擾乱の大きさが、安定成層の強さを表す浮力周波数に応じて大きく取れることを明らかにした。

(2) 回転成層 Boussinesq 方程式の時間周期問題

回転と安定成層が共存する状況で、非圧縮性 Boussinesq 方程式に対する時間周期問題に関して研究を行った。回転と安定成層に対応した時間発展作用素に対する分散型評価を応用することで、同方程式に対する時間周期解の一意的存在を証明した。特に、外力項の空間無限遠での減衰の仮定に関して、スケール劣臨界な空間へ条件を弱めることに成功した。また時間概周期問題に対しても、概周期解の一意的存在を証明した。

(3) 3次元非粘性成層 Boussinesq 方程式の長時間可解性と特異極限問題

3次元全空間において、安定成層の影響を考慮した非粘性 Boussinesq 方程式の初期値問題に関して研究を行った。粘性および熱拡散による消散性のない状況において、先行研究では時間局所適切性が知られていた。本研究では安定成層による分散性を用いることで、浮力周波数が十分大きい場合に、同方程式の長時間一意可解性を証明した。更に浮力周波数を無限大とする特異極限問題において、同方程式の長時間解である3次元速度ベクトル場が、2次元 Euler 方程式の長時間解へ収束することを証明した。

(4) 2次元非粘性成層 Boussinesq 方程式の長時間可解性と特異極限問題

2次元全空間において、非粘性成層 Boussinesq 方程式の初期値問題に関して研究を行った。2次元の場合は3次元と異なり、同方程式の長時間一意可解性が、Sobolev 正則性 $s > 3$ をもつ初期速度場に対して知られている。本研究では、Sobolev 埋込定理の観点から最適

と考えられる Sobolev 正則性 $s > 2$ をもつ初期速度場に対して, 同方程式の長時間一意解性を証明した. 特に, 先行研究における証明方法は, 線形時間発展作用素に対する時空積分評価と時間局所解の爆発判定法による背理法であったが, 本研究では 3 次元における特異極限問題で用いた安定性の議論を適用することで, 背理法を用いずに解の延長に関する証明を与えた.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

Ryo Takada, *Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **232** (2019), 1475–1503, 査読有.

DOI: 10.1007/s00205-018-01347-4

Matthias Hieber, Alex Mahalov and Ryo Takada, *Time periodic and almost time periodic solutions to rotating stratified fluids subject to large forces*, Journal of Differential Equations **266** (2019), 977–1002, 査読有.

DOI: 10.1016/j.jde.2018.07.067

Sanghyuk Lee and Ryo Takada, *Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations*, Indiana University Mathematics Journal **66** (2017), 2037–2070, 査読有.

DOI: 10.1512/iumj.2017.66.6179

Tsukasa Iwabuchi, Alex Mahalov and Ryo Takada, *Global solutions for the incompressible rotating stably stratified fluids*, Mathematische Nachrichten **290** (2017), 613–631, 査読有.

DOI: 10.1002/mana.201500385

Ryo Takada, *Long time existence of classical solutions for the 3D incompressible rotating Euler equations*, Journal of the Mathematical Society of Japan **68** (2016), 579–608, 査読有.

DOI: 10.2969/jmsj/06820579

Tsukasa Iwabuchi and Ryo Takada, *Dispersive effect of the Coriolis force and the local well-posedness for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Funkcialaj Ekvacioj **58** (2015), 365–385, 査読有.

DOI: 10.1619/fesi.58.365

[学会発表](計 47 件)

Ryo Takada, *Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations*, Maximal regularity and nonlinear PDE, RIMS Kyoto University, Kyoto, Japan, March 26--29, 2019.

Ryo Takada, *Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations*, Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, RIMS Kyoto University, Kyoto, Japan, July 4--6, 2018.

Ryo Takada, *Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations*, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Bad Boll, Germany, May 7--11, 2018.

Ryo Takada, *Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations*, The 15th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University, Tokyo, Japan, January 9--12, 2018.

Ryo Takada, *Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations*, Conference on PDEs and Applications to Physical and Biological Sciences, Renmin University of China, Beijing, China, July 15-16, 2017.

Ryo Takada, *Time periodic initial value problem for rotating stably stratified fluids*, Geophysical Fluid Dynamics, The Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany, May 7--13, 2017.

Ryo Takada, *Global solutions for the incompressible rotating stably stratified fluids*, The 13th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Congress Center Darmstadtium, Darmstadt, Germany, November 30 -- December 2, 2016.

Ryo Takada, *Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations*, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS119 Geometric functional inequalities and application to PDEs, Hyatt Regency Orlando, Orlando, Florida, USA, July 1--5, 2016.

Ryo Takada, *Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations*, The Navier-Stokes Equations and Related Topics -- In Honor of the 60th Birthday of Professor Reinhard Farwig --, Nagoya University, Nagoya, Japan, March 7 -- 11, 2016.

Ryo Takada, *Dispersive estimates for rotating fluids and stably stratified fluids I, II, III, IV* (Series of Lectures), The 12th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University, Tokyo, Japan, March 1 -- 4, 2016.

〔その他〕

アウトリーチ活動情報

高田了, 身近な自然現象の数理モデル, 九州大学オープンキャンパス(理学部), 九州大学, 2017年8月6日.

高田了, 回転成層流体の数理, 2018年度九州大学公開講座「現代数学入門」, 九州大学西新プラザ, 2018年8月11, 12日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

研究代表者氏名: 高田 了

ローマ字氏名: TAKADA Ryo

所属研究機関名: 九州大学

部局名: 数理学研究院

職名: 准教授

研究者番号(8桁): 50713236

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。