

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料
〔平成30年度研究進捗評価用〕

平成27年度採択分
平成30年2月28日現在

偏微分方程式の係数決定逆問題の革新的解決と応用

Renovating solutions and applications of coefficient inverse problems for partial differential equations

課題番号：15H05740

山本 昌宏 (YAMAMOTO MASAHIRO)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授



研究の概要

偏微分方程式の係数を、境界や部分領域における解のデータから決定するという係数決定逆問題の数学解析の中心課題である一意性ならびに安定性、再構成法を確立する。さらに産業現場や異分野に現れる応用逆問題の実用解法に適用していく。

研究分野：数物系科学

キーワード：境界値逆問題、リーマン計量決定、非ニュートン流体、非整数階微分方程式

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の初期値・境界値問題のような順問題は古典的な研究課題であり、大いに発展してきた。一方で、偏微分方程式の係数が未知の場合に、初期値・境界値問題などの解のさまざまな情報から、方程式の未知係数を決定する問題は逆問題とよばれる。逆問題においては解の一意性やデータの変動に関して、安定性が成り立たないという特徴があり、現在に至るまで偏微分方程式の研究は順問題を中心になされている。一方で腫瘍などの病変を人体に浸入することなく患者の負担を最小限にしたデータで検知する医用診断の問題、地下資源を地表面近くで検知する物理探査法、地殻構造を地震波のデータから決定する逆問題など、現実重要でその解決が公共の福祉に役立つ多くの逆問題があるが、数学解析は不十分であった。

2. 研究の目的

偏微分方程式の係数を境界や部分領域における解のデータから決定する係数決定逆問題の数学解析と応用の研究を実施する。係数決定逆問題は医用診断の問題や地下資源探査など解決が公共の福祉に不可欠な逆問題と密接に関連している。そのような現実の課題の解決に数学解析の結果が必須である。対象も放物型、双曲型及び楕円型方程式やシュレディンガー方程式などと多様で大きな広がりがあり数学解析の研究も深みがある。従来、個別になされてきた研究を、海外ネット

ワークが豊富な研究代表者などの参加者を中心に国際的な規模で行い、理論面での刷新と革新的かつ応用可能な方法の創出を図る。異分野で派生する逆問題へのニーズに答え、異分野連携による逆問題の数学の深化及び若手研究者の育成を図る。

3. 研究の方法

係数決定逆問題の主要課題は以下の(A)－(D)ならびに産業現場や異分野に現れる逆問題を扱う(E)である：

(A) 楕円型方程式の係数決定逆問題：特に境界値逆問題における一意性のための解の観測の空間的な条件の緩和

(B) リーマン多様体におけるリーマン計量決定逆問題：リーマン計量を境界上の点の対の測地線距離によって決定する逆問題を考察する。

(C) 流体力学におけるさまざまな非定常方程式や粘弾性体の方程式の係数決定逆問題：非圧縮性流体におけるNavier-Stokes方程式や圧縮性流体の方程式の粘性係数などを有限回の境界観測によって決定する逆問題について研究代表者らが開発した手法(例えばYamamoto 2009)で最良の安定性を証明する。

(D) 非整数階偏微分方程式の係数決定逆問題とそのための順問題の理論の構築

(E) 諸科学技術分野からの課題提起と応用：逆問題は応用分野と密接に関わっている。そこでそのような課題提起をうけてその数

学的基礎付けを行う。工学分野や産業現場での多様な現象を係数決定逆問題として定式化して現場の課題の類例をみない新しい解法を編み出す。

逆問題で国際的な評価を得ている研究代表者や分担者と、彼らをコアにした国際共同研究ネットワークを駆使して、課題ごとに内外の優れた研究者とわが国の次世代の研究者、院生も研究協力者に加えて、招へいや派遣を通じて、共同研究を実施し、成果を継続して出版していく。最近の研究内容・研究情報を収集し、当該分野に蓄積されてきた情報・知識を伝達する場として、逆問題関連の国内研究集会を組織し、我が国の応用解析の分野を国際的に指導していくための研究体制の整備にも目配りができるような若手の数学研究者育成を目指す。課題(E)とも関連させて、若手数学研究者の活動を産学・異分野連携にも本研究事業の枠組みで展開していく。

4. これまでの成果

課題(A) 楕円型方程式の係数決定逆問題に関する成果：2次元の場合に一般のシュレディンガー方程式に限定されない一般の2階楕円型方程式に対して、最上の一意性の結果を公表した。

課題(B) リーマン多様体におけるリーマン計量決定逆問題：本研究事業開始により、海外の幾何学を中心とした研究者との交流が進み、最近の研究動向として離散的多様体上での研究が幾何学者の間で強い興味を持たれており、離散化された問題も逆問題研究の中で重要性を増しつつある。

課題(C) 流体力学におけるさまざまな非定常方程式の係数決定逆問題：Carleman 評価による係数決定逆問題の数学解析において、追従を許さない成果と評価を得ている。さらに係数決定逆問題の数学解析の主要な手法としては、特別な方法を除けば Carleman 評価によるものと、境界値逆問題(ディリクレ・ノイマン写像による定式化)の2つかしかなく、本研究事業の課題(A)の遂行とあいまって、係数決定逆問題の主要な2つの方法論を駆使して、研究成果を最先端まで含めてカバーしていることになり、この分野で国際的な研究の中心になっている。

課題(D) 非整数階偏微分方程式の係数決定逆問題：当初の計画の想定を超えて、逆問題とともに順問題双方に関する古典的な偏微分方程式も包含するような大きな理論体系の構築に邁進している。

(E) 諸科学技術分野からの逆問題の課題提起と応用：逆問題に関連して活動を展開し、異分野・産業界での知名度も上がり、若手研究者の育成に顕著な効果をあげている。

5. 今後の計画

課題(A)、(B)、(E)についてこれまで通りに実遂行する。課題(C)については、基礎である Carleman 評価を、より広い範囲の偏微分方程式に確立し、方法論の拡大・深化を図る。

課題(D)について、逆問題とともに順問題の包括的な研究へと拡大し、古典的な偏微分方程式論も包含するような大きな理論体系の構築を目指す。

6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)・学術的出版

[1] H. Isozaki, Maxwell Equation :

Inverse Scattering in Electromagnetism, World Scientific, Singapore, 2018

[2] Kian, Y.; *Oksanen, L.; Soccorsi, E.; Yamamoto, M. Global uniqueness in an inverse problem for time fractional diffusion equations. J. Differential Equations 264 (2018), 1146-1170.

[3] Bellassoued, M. Yamamoto, M. Carleman Estimates and Applications to Inverse Problems for Hyperbolic Systems, Springer-Japan, Tokyo, 2017, 260pp.

[4] Amirov, Arif; Golgeleyen, Fikret; Yamamoto, M. Uniqueness in an integral geometry problem and an inverse problem for the kinetic equation. Appl. Anal. 96 (2017), 2236-2249.

[5] Imanuvilov, O., Yamamoto, M., On Calderon's problem for a system of elliptic equations. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 53 (2017), 141-186.

[6] Golgeleyen, Fikret; *Yamamoto, M., Stability for some inverse problems for transport equations. SIAM J. Math. Anal. 48 (2016), 2319-2344.

[7] Bellassoued, M., Imanuvilov, O., Yamamoto, M., Carleman estimate for the Navier-Stokes equations and an application to a lateral Cauchy problem. Inverse Problems 32 (2016), 025001, 23pp

・社会、国民への成果の発信

[1] 数学による社会連携の事例紹介：月刊誌「数学セミナー」において平成27年4月号から平成29年3月号まで隔月で12回連載

[2] 「ものづくりから汚染予測まで難問を解消する“万能方程式”」週刊ダイヤモンド、平成28年7月2日

[3] 「東大教授が助言、品質が劇的向上、愛知の町工場」週刊ダイヤモンド、平成28年1月23日、数学手法が自動車関連の製造業の国際競争力を高めた事例の紹介

ホームページ等

なし