

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 19 日現在

機関番号：12614

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06218

研究課題名(和文)量子可積分系の分配関数と対称多項式の表現論の研究

研究課題名(英文)Studies on the partition functions of quantum integrable models and representation theory of symmetric polynomials

研究代表者

茂木 康平(Kohei, Motegi)

東京海洋大学・学術研究院・助教

研究者番号：30583033

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：Felderhof模型、XXZ型6頂点模型の2種類の可解6頂点模型の分配関数に関する研究と、表現論への応用に関する研究を行った。Felderhof模型に関しては、双対波動関数と対称多項式の対応に関する研究を行い、Schur多項式、symplectic Schur関数に関する新たな組合せ論等式や、双対Cauchy公式の拡張を行った。XXZ型6頂点模型に関しては、三角型境界のドメイン壁分配関数の表式の導出を行った。更には、波動関数へと研究を拡張するため、これまでドメイン壁分配関数に制限されていたIzergin-Korepin解析を波動関数の場合に拡張する手法を確立した。

研究成果の概要(英文)：We studied two types of integrable six-vertex models: the Felderhof free-fermionic model and the XXZ-type six-vertex model. As for the Felderhof free-fermionic model, we investigated the dual wavefunctions, and derived the exact correspondence with the symmetric functions. As a consequence of the result, we derived a new combinatorial formula for the Schur functions. We extended the correspondence to the reflecting boundary conditions and proved that the dual wavefunctions are expressed as the symplectic Schur functions. As for the XXZ-type six-vertex model, we made the Izergin-Korepin analysis on the domain wall boundary partition functions, and proved that certain symmetric functions satisfy the required properties. Moreover, we have succeeded in extending the analysis to the wavefunctions which is a more general class of partition functions. To accomplish this, we extended the Izergin-Korepin analysis from the classical domain wall boundary partition functions to the wavefunctions.

研究分野：量子可積分系

キーワード：量子可積分系 可解格子模型 対称多項式 表現論 組合せ論

1. 研究開始当初の背景

量子可積分系や可解格子模型でこれまで盛んに研究されてきた対象は多くの場合、SRS行列や転送行列である。一方、統計力学における最も重要な対象である分配関数は、SRS行列より構成される大域的構造物である。1980年代にはドメイン壁分配関数と呼ばれるクラスの分配関数が Korepin によって導入され、その明示的な行列式表示が Izergin によって得られた。1990年代に入ると、ドメイン壁母関数が交代符号行列の数え上げ母関数の一般化に相当していることが認識されるようになり、交代符号行列の研究に著しい進展を引き起こした。

近年では波動関数と呼ばれるより一般の分配関数が、対称多項式との関連や、数え上げ幾何や保型表現論との関連から関心を集めており、今後、重要な研究対象となると思われる。本研究課題は、量子可積分系の分配関数の代数解析的研究により、Schur 多項式、Hall-Littlewood 多項式や Grothendieck 多項式をはじめとする対称多項式に関する表現論に新たな知見をもたらすことである。

2. 研究の目的

表現論、組み合わせ論での重要な研究対象である対称多項式は、量子可積分系やゲージ理論をはじめとする数理物理において、固有関数や波動関数として出現する。このため、過去の表現論において蓄積されてきた対称多項式に関する公式などの研究結果を使った数理物理の解析が行われてきたが、本研究の目的はこれとは逆方向の研究である。即ち、数理物理の観点から、対称多項式の表現論、組み合わせ論に関して新たな研究の進展をもたらすことである。

特に、可解 6 頂点模型に関する理解を深めることで、新たな研究ができると考えている。この背景としては、以前、我々が行った可解 5 頂点模型の研究があり、波動関数が Grothendieck 多項式と対応していること、また、この対応から、Grothendieck 多項式に関して代数解析的研究を行うことが可能になり、Cauchy 公式や Littlewood 公式、直交性等の公式を導出した。また、Grothendieck 多項式の組み合わせ論的記述のために Ikeda-Naruse によって Schubert calculus で導入された excited Young 図形と呼ばれる概念が、可解 5 頂点模型の波動関数に非自明な寄与をする内部状態をラベルするものであるという解釈をすることができることも見出した。我々が解析した可解 5 頂点模型は可解 6 頂点模型で量子群のパラメータ q を 0 として退化させた模型であると考えられる。このことを踏まえると、可解 6 頂点模型の波動関数を表す対称多項式は Grothendieck 多項式の量子群変形と呼ばれるべき対称多項式である。この対称多項式の明

示表示を決定し、さらに他の種類の分配関数の解析と合わせることにより、量子群変形 Grothendieck 多項式に関する種々の公式を導出できると考えている。

また、可解 6 頂点模型といっても、それを定める SRS 行列は 2 種類あり、上記の可解 6 頂点模型の SRS 行列は Drinfeld-Jimbo 表現に付随するものである。1 のべき根最高ウェイト表現やスーパーリー環に付随する SRS 行列も存在し、Felderhof 模型と呼ばれる可解 6 頂点模型と等価であることが 1990 年初頭にわかっていたが、波動関数に関する研究は近年、Bump-Brubaker-Friedberg によってもたらされた。彼らが明らかにしたのは、Felderhof 模型の波動関数が徳山公式の可解格子模型による実現を与えることである。Felderhof 模型の場合、波動関数はスペクトル変数に関して単純に対称にはならないが、この性質をより深く理解することで、波動関数が Vandermonde 行列式の 1 パラメータ変形と Schur 多項式の積で表現されることを彼らは明らかにした。この積は、徳山豪氏による Schur 多項式の Weyl 指標公式の 1 パラメータ変形の公式(徳山公式)に出現するものと丁度一致することから、Felderhof 模型の波動関数が徳山公式と密接に結び付くことが認識され、Bump-McNamara-Nakasuji による factorial Schur 関数への拡張や、反射境界条件を考えることにより、symplectic Schur 関数との対応があること、更には Metaplectic ice と呼ばれる、 p 進代数群との関連もふまえた対象が導入、研究されている。Felderhof 模型に対しても量子逆散乱法の観点で整理、理解し、代数解析的手法を導入することで新たな研究を進めたいと考えている。

3. 研究の方法

以前に行った可解 5 頂点模型の波動関数と Grothendieck 多項式の研究で、明示的な対応関係を導出する際、波動関数の解析する方法として、ドメイン壁分配関数の Izergin-Korepin 解析と行列積の手法を組み合わせる手法を用いた。この手法を可解 6 頂点模型の場合に拡張することで、波動関数を表す Grothendieck 多項式の量子群変形と呼ばれるべき対称多項式の明示式を導出する。更に、ドメイン壁分配関数やスカラー積とよばれる分配関数の量子逆散乱法による解析を通じて、量子群変形 Grothendieck 多項式の種々の公式を導出する。また、この手法を Felderhof 模型にも適用する。

申請時の段階で書いた上記の研究方法で一定の成果を上げたが、研究期間中、波動関数を決定する上述の方法とは別の方法を編み出した。Izergin-Korepin 解析と呼ばれる、ドメイン壁分配関数を決定する際に用いられた手法を、波動関数の場合に拡張すること

に成功し、量子空間のパラメータが非等質である、より一般的な波動関数の明示表示も導出した。この手法は、申請時の段階で述べた方法では解析するのか極めて困難と思われた境界条件の変種や、楕円型の模型に対しても有効であることがわかり、以下の研究成果を挙げることができた。

4. 研究成果

最も重要な量子可積分系の分配関数は波動関数である。波動関数は対称多項式と対応があるが、具体的な対応を見出し、証明することが最も重要な研究である。Felderhof 模型と XXZ 型模型の 2 種類の可解模型の波動関数の研究を行った。

Felderhof 模型に関しては、双対波動関数と Schur 関数の対応を明らかにした。また、その対応に基づき、双対徳山公式と呼ぶべき Schur 関数の新たな組み合わせ論表示を導出した。元々の徳山公式と比べて非常に複雑であり、可解格子模型に基づく理解がなければ、導出することができない Schur 関数に関する公式であると考えている。この研究を行う際、双対波動関数と対称多項式の対応に関し、証明を 2 通り与えた。1 つの方法は、波動関数を、自由パラメータに関する多項式であるとみなし、その多項式の性質を調べるという Bump-Brubaker-Friedberg の方法が適用できるように、 R 行列に対してゲージ変換を繰り返し施す方法であり、この証明方法は factorial Schur 関数の場合に対してもそのまま適用可能である。もう 1 つの方法は、ドメイン壁分配関数の Izergin-Korepin 解析と行列積の手法を組み合わせる手法である。

ドメイン壁分配関数の Izergin-Korepin 解析と行列積の手法を組み合わせる手法を XXZ 型可解 6 頂点模型に対しても適用し、波動関数を与える対称多項式を決定した。この研究は以前に行った 5 頂点模型の波動関数と Grothendieck 多項式の対応の研究の量子群拡張に相当する。また、この対応に基づき、Grothendieck 多項式を量子群変形した多項式の組み合わせ論的性質をいくつか導出した。

上記の研究で用いたドメイン壁分配関数の Izergin-Korepin 解析と行列積の手法を組み合わせる手法は、波動関数の研究をより一般的な楕円型や境界条件の変種に対しても適用するのは難しいと思われた。そこで研究期間の最終盤に、ドメイン壁分配関数の研究で 1980 年代に導入された Izergin-Korepin 解析と呼ばれる解析手法を波動関数の場合に拡張する方法を考案した。これにより、例えば三角型境界の XXZ 型 6 頂点模型の波動関数と対称関数の関係を確認することができた。Schur Q 関数を想起させる(しかし、はるかに複雑な)和の形をした対称関数が出現

することがわかった。この手法は境界条件の変種のみならず、楕円型の場合に拡張した面型の可解模型の解析にも非常に有効であることがわかりつつあり、この手法を用いた研究を継続していきたいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 1 件)

茂木 康平

Dual wavefunction of the Felderhof model,
査読有、2017 1-29 印刷中

DOI: 10.1007/s11005-017-0942-2

〔学会発表〕(計 2 件)

茂木 康平

可解格子模型の分配関数と対称多項式、
日本数学会 2016 年度秋季総合分科会
無限可積分系セッション特別講演
関西大学

茂木 康平

可解格子模型と対称多項式、
東京海洋大学 数理物理学セミナー
東京海洋大学

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

茂木 康平 (MOTEGI, Kohei)

東京海洋大学・海洋工学部・助教

研究者番号：30583033

(2)研究分担者
()

研究者番号：

(3)連携研究者
()

研究者番号：