

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 29 日現在

機関番号：13901

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06262

研究課題名(和文) 複素解析的手法による偏極多様体の安定性の研究

研究課題名(英文) Complex analysis and stability of a polarized manifold

研究代表者

久本 智之 (Hisamoto, Tomoyuki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：00748345

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：高次元の複素代数多様体が自然な計量を持つかというのは微分幾何の基本的な問題である。このことの最も自然な定式化として、偏極多様体が定スカラー曲率ケーラー計量を持つことはK安定性と呼ばれる代数的な条件と同値であると予想されている。我々は従来よりも強い一様K安定性という概念について調べ、これが定スカラー曲率ケーラー計量を臨界点として特徴付ける自然なエネルギー汎関数の増大条件に対応することを示した。これは従来の予想に対しても新しいアプローチを提供する。

研究成果の概要(英文)：A fundamental question of differential geometry is whether a complex algebraic manifold in higher dimension admits a canonical metric. In the most natural formalism it is conjectured that a polarized manifold admits a constant scalar curvature Kahler metric if and only if it satisfies a purely algebraic, so-called K-stability condition. We studied more stronger "uniform k-stability" and showed that it corresponds to the growth condition of the canonical energy functional which characterizes the constant scalar curvature Kahler metric as a critical point. Our study also provides a new approach to the original conjecture.

研究分野：複素幾何

キーワード：安定性 定スカラー曲率計量 モンジュ・アンペール方程式 ベルグマン核

1. 研究開始当初の背景

偏極多様体が定スカラー曲率ケーラー計量を持つこととそれが K 安定性と呼ばれる代数的な条件を満たすことは同値だと予想されている。これは現在 Yau-Tian-Donaldson 予想と呼ばれ、近年ファノ多様体の場合に解決されるという大きな進展があった (X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun: Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. J. Amer. Math. Soc. 28 (2015), no. 1, 235-278.)。定スカラー曲率計量という観点から、あるいは代数幾何学におけるモジュライ問題の文脈においても、この予想は偏極多様体で定式化するのが自然であるが、一般の場合には証明の方針すら知られていなかった。一方で、定スカラー曲率計量の存在を言うためには従来の K 安定性では不十分なのではないかとも考えられ、実際 G. Székelyhidi 氏や満淵俊樹氏はより強い安定性の概念を提唱していた。このように、一般の場合には正しい安定性の概念が何であるかというところから見通しが明らかでない状況であった。

2. 研究の目的

我々は G. Székelyhidi 氏 (G. Székelyhidi: Extremal metrics and K -stability, Ph.D Thesis. (2006)) の導入した、従来の K 安定性よりも強い概念である一様 K 安定性という条件に注目した。(ただし後述するようにこの一様 K 安定性には幾つかのヴァリエーションがあり、その安定性が正しいかは考察の余地があった。) より強い条件であれば、計量の存在を示すことはより容易となる。一方でこの新しい概念が意味のある条件であることを示すために、この条件が具体的にどのような多様体で満たされているかを確認しなければならない。そして、この条件が微分幾何学的にはどのような意味を持つかを明らかにせねばならなかった。

3. 研究の方法

(1) K 安定性は、テスト配位と呼ばれる多様体の退化に対しその Donaldson・二木不変量が正であるという条件で定義される。一様 K 安定性は、この Donaldson・二木不変量の値がテスト配位の取り方に依らず一様に下から抑えられるという条件である。具体的にどのような多様体が一様 K 安定であるかを調べる上では、尾高悠二氏 (Y. Odaka: The Calabi conjecture and K -stability. Int. Math. Res. Not. (2012), no. 10, 2272-2288.) による Donaldson・二木不変量の交点数表示を用いたテクニックを活用した。また、一様 K 安定性の定義は一様性を測るためのノルムと呼ばれる不変量に依存しており、このノルムをどう選ぶかが微妙な問題となる。我々は研究の中で、 L_1 ノル

ムが正しいノルムであることを示した。従来自然と考えられてきたのは L_2 ノルムであるが、3次元以上では L_2 ノルムによる一様 K 安定な多様体は存在しないことを具体例によって示した。我々は以前の研究で、このようなノルムがケーラー計量全体が成す空間の幾何学と関係づけられることを発見しており、それが今回の研究に至る着想の元となった。のみならず、そこで培われた微分幾何学的なイメージは、以下の(2)で述べる方法を発展させてゆく。

(2) また、こうした交点数と、古典的なエネルギー汎関数の無限遠での勾配とを結びつけることで、一様 K 安定性の微分幾何学的な意味を見出した。テスト配位は元の多様体上のケーラー計量の空間上に曲線の同値類を定めるが、Donaldson・二木不変量などの代数的量は、古典的に知られているエネルギー汎関数たちの曲線に沿った勾配と理解されるのである。特に、Donaldson・二木不変量が K エネルギーの勾配に相当する。また、 L_1 ノルムが J ノルムと呼ばれるものと同値であり、 J ノルムは古典的な Aubin の J 汎関数に対応することを発見した。このような見通しを得る上で、共同研究者の S. Boucksom 氏と M. Jonsson 氏が背景として持っていた非アルキメデス的ポテンシャル論が強力な役割を果たした。このような非アルキメデス的描像によれば、テスト配位は元の多様体に付随するペルコヴィッチ空間の上の計量と見なすことができ、Donaldson・二木不変量や J ノルムはどのように定まる計量が成す空間の上で定義されたエネルギー汎関数と見なせるのである。

4. 研究成果

(1) まず、カラビ・ヤウ多様体など、ケーラー・アインシュタイン計量を持つような多様体として古典的に知られていたクラスの多様体が、一様 K 安定であることが分かった。また、自己同型群が有限なファノ多様体がケーラー・アインシュタイン計量を持つならば、実際に一様 K 安定性が成り立っていることが示された。これは、定スカラー曲率ケーラー計量を求める上で、 K 安定性よりも強い一様 K 安定性を仮定しても良いという根拠を与えるものである。

(2) 一様 K 安定性が K エネルギー汎関数の coercivity と呼ばれる増大条件から導かれることを [3. 研究方法] で述べたアイデアによって示した。逆も例えば自己同型群が有限なファノ多様体なら成り立つので、これにより一様 K 安定性の持つ微分幾何学的な意味が明らかになったと言って良い。この結果は、元々の定スカラー曲率ケーラー計量を求める問題に対し新しい方法を示している。すなわち、一様 K 安定性からエネ

ルギー汎関数の coercivity を導き、そこから臨界点たる計量を求めるという、変分法的なアプローチである。つい最近、ファノ多様体に対してはこのアイデアが実行可能であることが Berman, Boucksom and Jonsson: A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture. ArXiv150.04561. によって示された。従来の方法では Cheeger-Colding によるリーマン多様体の非崩壊理論を用いなければならないのに対し、変分法的アプローチではそれを必要としない。非崩壊理論は難解であるだけでなく、リッチ曲率のコントロールがなければ適用できない。一般の偏極多様体ではそのような都合の良いことは期待できないため、変分法的アプローチの方が有効であると思われる。

(3)さらにこのような条件と自己同型群との関係について考察を行った。定スカラー曲率ケーラー計量が存在すれば多様体の自己同型群は簡約代数群になることが知られているが、一様 K 安定ならば自己同型群は有限群になることが分かった。このことから、自己同型群が連続群である場合には一様 K 安定の概念は適切ではないことが分かる。自己同型群が連続な場合に一様 K 安定の定義を正しく拡張する研究を行い既にいくつか部分的な結果も得ているが、これについては残された課題の一つとしたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2件)

S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson: Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs. To appear in Annales de l'Institut Fourier. (印刷中。査読有り, arXiv.1504.06568.)

S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson: Uniform K-stability and asymptotics of energy functionals in Kähler geometry. To appear in European Journal of Mathematics. (印刷中, 査読有り, arXiv.1603.01026.)

[学会発表](計 8件)

久本智之: On Uniform K-stability. School and International Conference on Geometry and Quantization. ICMAT, Madrid Spain, 2015年9月17日.

久本智之: The strong version of K-stability derived from the coercivity property of the K-energy. SCGP weekly

talks, Simons Center, New York USA, 2015年11月3日.

久本智之: Stability condition derived from the coercivity of K-energy. 幾何コロキウム, 東京大学, 2015年11月27日.

久本智之: Alpha-invariant and modulus of uniform K-stability. Workshop on L2 extension theorems, 東京大学, 2016年2月15日.

久本智之: Stability and coercivity for toric polarized manifold. 代数幾何・複素幾何セミナー, 大阪大学, 2016年6月1日.

久本智之: Stability and coercivity for toric polarized manifolds. Trends in Modern Geometry, 東京大学, 2016年7月23日.

久本智之: Coercivity of the K-energy and uniform K-stability. Seminaire de Geometrie, Universite de Bretagne Occidentale, 2016年12月2日.

久本智之: Coercivity of the K-energy and uniform K-stability. Seminar of Geometry, Rome Tre, 2017年2月2日.

[図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

www.math.nagoya-u.ac.jp/~hisamoto/

6. 研究組織

(1)研究代表者

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

久本智之 (HISAMOTO, Tomoyuki)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
助教
研究者番号 : 00748345

(2)研究分担者
()

研究者番号 :

(3)連携研究者
()

研究者番号 :

(4)研究協力者
()