様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月 14 日現在

機関番号：１３９０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2015～2018
課題番号：１５H０６２８４

研究課題名（和文）曲線複体の細密な性質を用いた３次元多様体のヘンペル距離の研究

研究課題名（英文）Research on Hempel distances of 3-manifolds by using the detailed properties of the curve complex

研究代表者

井戸　絢子（Ido, Ayako）

愛知教育大学・教育学部・助教

研究者番号：００７５９５３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究では，従来の曲線複体の測地線の構成方法を更に改良，及び精密化に取り組んだ．その過程で，keenと呼ばれる新しい概念を導入し，任意のn>1に対して，keenなHeegaard分解でヘンペル距離がnとなるものが必ず存在することを示した．さらに，keenの概念の絡み目の橋分解に対しての拡張を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
　曲線複体は３次元多様体，クライン群，写像類群，タイヒミュラー空間の研究などに幅広く活用されている．特に最近はHeegaard分解に限らず，多くの分野の懸案が曲線複体の概念を用いた手法を利用することにより解決されている．従来とは異なる，細密な幾何学の観点から曲線複体を研究することで得られた本研究の成果は，ヒーガード分解に限らず，関連する他の分野にも新たな展開をもたらすことが期待される．

研究成果の概要（英文）：In this research, we improved the techniques to construct geodesics in the curve complex. In the process, we introduced a new concept on Heegaard splitting, called "keen", and showed that there exists a keen Heegaard splitting with Hempel distance n for any integer n>1. Moreover, we expanded this concept to bridge splittings.

研究分野：位相幾何学

キーワード：３次元多様体　Heegaard分解　ヘンペル距離　曲線複体

１．研究開始当初の背景

３次元多様体の Heegaard 分解とは３次元多様体を２つの同相な部分多様体（ハンドル体）に分けるという分解で，その分解の断面が Heegaard 曲面と呼ばれる閉曲面である．全ての３次元多様体は，このような分解を持つことが知られており，３次元多様体の研究において非常に基本的な役割を果たす．さらに，例えば３次元球面が２つの３次元球体の貼り合わせや，２つのソリッドトーラスの貼り合わせにより構成できることからも直ちに分かるように，一般に１つの３次元多様体は様々な Heegaard 分解を持つ．従って，３次元多様体の研究に Heegaard 分解を用いるためには，特に『良い性質（例えば Heegaard 曲面の種数）』を持つ Heegaard 分解を与えることが重要である．

一方，Hempel によって導入されたヘンペル距離の概念はどれくらい効率よく Heegaard 分解が与えられているかを測っている．ヘンペル距離は，Heegaard 分解の所謂『既約性』や『同値性』の判定に用いることができ，更には，３次元多様体の複雑さをも反映することが示されているおり，３次元多様体を研究する上で非常に強力な概念となっている．実際に，Heegaard 曲面の種数に関する長年の懸案の一つであった安定化予想もヘンペル距離を用いて解決されている．このように，　ヘンペル距離は非常に強力な概念であるが，現段階では，「与えられたヘンペル距離を実現するような Heegaard 分解が存在する」ということが，様々な問題に対する主な証明手法になっており，与えられたヘンペル距離を実現する Heegaard 分解を具体的に取り扱う研究はあまり進んでいない．

２．研究の目的

本研究では，ヘンペル距離の定義に用いられた曲線複体を従来の観点とは異なる，より細密な幾何学の観点から追求することで，与えられたヘンペル距離を実現する Heegaard 分解を具体的に構成し，そのような Heegaard 分解を許容する３次元多様体の性質，位相構造を明らかにすることを大きな目的とした．具体的には以下について取り組んだ．

(1) 曲線複体は Harvey によって導入された概念で，Masur-Minsky によって大きく進展し，強力な証明手法としてタイヒミュラー空間，写像類群，３次元多様体など様々な分野で活用されると共に，その曲線複体がもつ様々な性質にも注目されている．実際，Li 氏によって曲線複体の部分複体の一つである円盤複体の像の直径が高々１２であることが示されている他，Birman-Menasco によって，任意の正整数 n に対してヘンペル距離がちょうど n となるような曲線複体上の測地線の構成方法が与えられている．また彼らとは独立に，小林毅氏，張娟姫氏と行ってきたこれまでの共同研究においても，擬アノソフ写像と Masur-Minsky によって導入された部分曲面射影写像（subsurface projection）と呼ばれる曲面上の閉曲線をその部分曲面上に“うまく射影する”写像を用いて，測地線の構成方法を与え，それを用いてヘンペル距離がちょうど n となる Heegaard 分解が存在することを示した．本研究ではこれら既存の測地線の構成方法を改良し，より性質の良い測地線の構成を目指した．

(2) 曲線複体がもつ様々な性質と，その高い応用性から，本研究で得られた曲線複体の測地線の性質を３次元多様体の Heegaard 分解だけでなく，関連する他の分野へ応用することに取り組んだ．

３．研究の方法

(1) ヘンペル距離を具体的に扱うためには，その定義に用いられた曲線複体を調べることが自然である．実際に，小林毅氏，張娟姫氏とのこれまでの共同研究で，擬アノソフ写像と Masur-Minsky によって導入された部分曲面射影写像（subsurface projection）と呼ばれる曲面上の閉曲線をその部分曲面上に“うまく射影する”写像を用いて測地線の構成方法を与え，それを用いてヘンペル距離がちょうど n となる Heegaard 分解が存在することを示したが，本研究では，この測地線の構成方法をさらに精密化することで，曲線複体上の与えられた２点を結ぶ測地線が一意的に構成できる方法を考案した．その構成方法をもとに，曲線複体の部分複体等のより細密な性質の追求した．さらに，そのような曲線複体の性質を，与えられたヘンペル距離を実現する Heegaard 分解，絡み目の橋分解へ適用した．

(2) 上記に加え，曲線複体の測地線の構成方法の更なる発展を試みた．具体的には，Johnson によって導入された「flexpath」という曲線複体上の測地線に関する概念と，そのような測地線の性質について詳細な吟味を行い，その手法の改良に取り組むと共に，ヘンペル距離の評価の改善への適用について考察を進めた．

４．研究成果

(1) 奈良女子大学の小林毅教授，張娟姫准教授との共同研究で，Heegaard 分解に対して「keen」と呼ばれる概念を導入し（ここで、与えられた Heegaard 分解が keen であるとは，ヘンペル距離を実現するハンドル体の本質的円板の組が一意であるときをいう），任意の g(>2)と自然数 n に対して，ヘンペル距離がちょうど n となるような種数 g の keen Heegaard 分解が存在することを示した．この結果をまとめた論文は Advance Studies in Pure Mathematics に掲載された．

(2) 奈良女子大学の小林毅教授，張娟姫准教授との共同研究で，絡み目の橋分解に対して keen の概念を拡張することを試みた．Keen な Heegaard 分解に対しては，非分離的単純閉曲線を用いて曲線複体上の測地線を構成することが証明の要となったが，Keen な橋分解に対しては，非分離的単純閉曲線，分離的単純閉曲線のどちらを用いても構成することが可能であるということを確かめ，現在，keen な絡み目の橋分解の存在についてまとめた論文の執筆を進めている．

(3) ヘンペル距離の評価の改善に関して，Johnson は「flexpath」という曲線複体上の測地線に関する概念を導入し，圧縮不可能曲面をもつ３次元多様体のヘンペル距離の既存の評価が最良であると示していることが分かった．この結果は正式な出版がされていないため，証明の十分な吟味が必要ではあるが，この事実は，曲線複体の測地線の構成がヘンペル距離の評価の改善において非常に有効な手法となることを裏付けているため，Johnson の手法の精密化を推し進めた．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　３件）

(1) A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, *On keen Heegaard splittings*, 査読あり,
Advance Studies in Pure Mathematics 78(2018), 293–311

(2) A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, *Bridge splittings of links with distance exactly n*, 査読あり,
Topology and its Applications 196, B, 608-617 (2015)

(3) A. Ido, *An estimate of Hempel distance for bridge sphere,* 査読あり,
Bulletin of the Korean Mathematical Society 52 (2015), No. 3, 735-740

〔学会発表〕（計　２件）

(1) 井戸　絢子,『ヘンペル距離の実現問題について』
奈良女子大学トポロジーセミナー　2018 年

(2) Ayako Ido, 『On keen Heegaard splitting』
Singularities in Generic Geometry and its Applications-- Kobe-Kyoto 2015 (Valencia IV)　2015 年

６．研究組織

(2)研究協力者
研究協力者氏名：小林　毅,
ローマ字氏名：(KOBAYASHI, Tsuyoshi)

研究協力者氏名：張　娟姫,
ローマ字氏名：(JANG, Yeonhee)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。