1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：３２６４１

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：１５Ｈ０６６１７

研究課題名（和文）高次元多面体の直径と単体法に関する研究

研究課題名（英文）Studies on Diameter of High-Dimensional Polyhedra and Complexity of Simplex Method

研究代表者

鮭川　矩義（SUKEGAWA, NORIYOSHI）

中央大学・理工学部・助教

研究者番号：２０７５７７１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：多面体の直径と単体法の計算量について研究を行なった．特に，次元と面の数をパラメータとして多面体の直径の上界を求める方法について研究を行なった．直径の良い上界を見つける問題は多面体理論の主要な研究課題の１つであるが，４次元以上の場合についてはあまり進展がないままであった．本研究では高次元の多面体を対象として直径の上界を（i）計算機を利用して数値的に改善する方法，（ii）新しい証明方針によって理論的に改善する方法，の２つを提案した．実際，これらの方法によって，直径の上界を改善することに成功した．

研究成果の概要（英文）：In this research, we investigate the diameter of polyhedra. In particular, we improved the current best upper bound on the diameter of a polyhedron in terms of two parameters: dimension and number of facets of the given polyhedron. Finding a good upper bound on the diameter of a polyhedron is an outstanding open problem in the area of polyhedral combinatorics. We devised (i) a computer-assisted proof method for deriving numerically improved upper bounds and (ii) new proof techniques for deriving theoretically improved upper bounds especially for high-dimensional polyhedra.

研究分野：オペレーションズ・リサーチ，特に，最適化の理論と応用

キーワード：多面体理論　単体法　計算量

１．研究開始当初の背景

多面体の頂点と辺で定義される組合せ的構造は1-スケルトンと呼ばれ，その特徴を調べることは多面体理論の主要な研究課題の 1 つとなっている．本研究課題で着目する直径は，多面体の辺を辿って頂点間を移動することを考えたとき，どの程度移動しやすいかを定量的に評価する指標である．具体的には，２つの異なる頂点の間を移動するのに必要となる辺の本数の最大値として定義される．直径は，多面体の基本的な特徴量であるだけでなく，線形計画問題に対する単体法などの最適化手法の計算量とも密接に関係している．そのため，多面体理論だけでなく，最適化理論・アルゴリズム論の分野においても盛んに研究がなされてきた．

多面体の直径に関する最も有名かつ古典的な予想は今から約 60 年前に提起された Hirsch 予想である．これは，多面体の直径が多面体の次元と面の数に関するある線形関数より必ず小さいあるいは等しいと主張するものである．同予想は約 50 年もの間未解決であったが，2010 年に Santos が否定的に解決し，大きな注目を集めた．

Santos の定理は Hirsch の予想した上界が一般には成り立たないことを主張するものであり，多面体の直径がどのように変動するか，特に，その上界，すなわち，次元と面の数を固定した場合に直径が最大でどの程度大きくなるか，については言及していない．Hirsch の予想した上界は次元と面の数に関する線形関数であった．一方，研究開始時点での最良の上界は，線形関数からは程遠い，準指数関数であった．単体法の計算量との関係からは，多項式関数の上界が存在するかどうかが主要な疑問となる．しかしながら，この疑問も未解決であり，polymath プロジェクトの「問題番号 3：多項式 Hirsch 予想」として広く認識されている．polymath プロジェクトは数学の主要な未解決問題を集めたオンラインサイトである．

このような背景を受け，Santos の研究成果の発表以降，多面体の直径に対する良い上界を見つける研究が多角的に進められた．いくつかの進展があったが，本研究では，研究開始時点で最良であった準指数関数の上界に着目する．これは，2015 年に Todd によって証明されたものである．低次元では限界（それ以上良くできない上界）に到達しているなど，いくつかの利点がある．しかし，高次元においてさらなる改善が可能かどうかは不明であった．

２．研究の目的

本研究では，2015 年に Todd によって証明された，研究開始時点で最良の上界を，高次元でさらに改善する方法について探求し，より良い上界を得ることを目的としている．具体的には，既存研究で用いられてきた帰納法に基づく証明方法に着目する．そして，議論の対象を高次元の多面体に限定することで，その証明能力が強化できるか，すなわち，得られる上界が改善できるか，明らかにする．また，改善できる場合には，その限界についても議論する．

３．研究の方法

既存研究で用いられた，帰納法に基づく証明方法では，ある再帰不等式が重要な役割を果たしている．この再帰不等式を等号で満たす解を理論上は定義でき，それは上界となるが，その一般解を陽に求めることは非常に難しいと考えられている．そこで本研究では，第一段階として，等号ではなく，不等号を満たす解を実験的に探究する．ここでは，解が表現する上界がなるべく小さい（良い）ものになるように，実験を進める．第二段階では，第一段階で候補となった解が実際に妥当な上界になることの証明を試みる．このようにして，数値実験と証明を交互に繰り返し，上界を改善していくというアプローチをとる．もちろん，第二段階から第一段階にアイディアを還元するというアプローチも考慮する．

４．研究成果

本研究で得られた成果は主に以下の３つに分けられる．

(1) Todd の上界の数値的改善：多面体の直径に対する上界の計算機を利用した新しい証明方法の提案

この成果によって，実際に Todd の上界を改善することに成功した．この成果での要点は次のとおりである．

証明方法は基本的には次元に関する帰納法である．そのため，帰納法の初期ステップは，与えられた（証明したい）上界が正しい上界であることを低次元で証明することである．本研究では，この初期ステップで対象とする次元を低次元から高次元へと移していくと，それに伴い，得られる上界も改善されていくという事実を観察した．すなわち，当初の目的であった，高次元多面体に対して解析を強化することに成功した．

ここで難しいのは，指定された（比較的高い）次元において，与えられた上界の妥当性を保証するための確立された方法がないという点である．この難点を克服するために，本研究では計算機を用いた証明方法を提案した．その性質上，証明方法の能力，すなわち，得られる上界の質，は用いられる計算資源の規模（主にメモリ）に依存する．しかし，本研究で用いた（スーパーコンピュータなどではない）計算機でも，Todd の上界を 3 乗のオーダーで改善することが確認された．

(2) Todd の上界の理論的改善

この成果の概略を述べるために，Todd の上界についての説明を追加する．Todd の上界は次元と面の数に関する準指数関数であり，そ

の指数部は log(d)であった．ここで d は対象となる多面体の次元であり， log の底は 2 であるとする．この研究内容に関連した多面体理論における主要な未解決問題の１つは，前述の多項式 Hirsch 予想と呼ばれるものである．次元と面の数に関する多項式関数の上界の存在・非存在を問うものであり，見方を変えれば，この log(d)という項が定数となるような上界の存在・非存在を判定せよ，というものである．

多項式 Hirsch 予想が未解決であることを考慮すると，この d の項がどの程度小さくなるか，が興味の対象となる．(1)で述べた計算機を利用した証明方法は，定数αが与えられたときに，d が d/αに削減できるかどうかを数値的に判定するというものである．(2)では，この d を d/log(d)に削減した．ただし，定数係数は無視している．この成果のメリットは，証明に計算機を全く用いない点と，理論的なオーダーの意味で漸近的に指数部を削減している点である．（※ d/αはαが定数であるため，計算量理論のオーダー記法では d と同じになる．しかし，d と d/log(d)は異なる）

ここで，(1)と(2)の成果について，どちらか一方が他方より優れているというわけではない，という点に注意されたい．これは，(1)で証明できる上界の質が実験に用いられる計算資源の規模に依存するという性質のためである．

(3) 線形計画問題に対する単体法の計算量および他の有効な手法の計算量の上下界の改善

はじめに，非退化多面体上での単体法の計算量の下界を与えた．「１．研究開始当初の背景」で述べたように，単体法の計算量と多面体の直径は密接に関係しており，ここでは，多面体の直径ではなく，単体法の計算量に主眼を置いて研究を進めた．

単体法の計算量を解析する際，議論を簡単にするために，付随する多面体が非退化であることを仮定する場合が多い．そこで，非退化を仮定しない，つまり多面体が退化している場合に単体法がどのような挙動を示すか考察した．単体法は多面体の頂点を移動してゆき，最終的に最適な頂点を見つけるという解法である．そのため，頂点の個数が少ない問題例であれば比較的簡単に高速に最適解を計算すると考えられる．しかし本研究では，頂点がたった１つの多面体であっても単体法の計算量が指数的に増加するような，簡潔な問題例を提案した．本研究のように，単体法の計算量が悪化する問題例を報告した研究は過去に数多く存在するが，そのほとんどは入力データに非常に大きな値を用いるという特徴を持っている．一方，本研究で提案した問題例では，用いられる数値は 0,1,2 のみである．この結果は，入力データの総ビット長が比較的短い場合であっても，単体法の計算量が非常に悪くなる場合があるという事実を意味する．

一方で，線形計画問題に対する単体法の代替案として注目を集めていた LP-ニュートン法に着目し，研究を進めた．具体的には，その計算量の見積もりが良くなるような改善案を掲示した．LP-ニュートン法は，線形計画問題の特殊な場合に対して，問題例に付随する多面体をゾノトープと呼ばれる良い性質を持った多面体へと変形させ，問題を解くという解法である．

<u>今後の課題</u>

多面体の直径に関する研究では，議論の対象を高次元多面体に限定して研究を前進させた．これにより，既存の再帰不等式に対する解析が強化でき，結果としてより良い上界が得られた．しかしながら，これは，解析を強化したのみで，再帰不等式そのものを強化したわけではない．（実際，この再帰不等式からは多項式関数の上界を得ることがある意味で難しい，という事実が証明できる.）そのため，多項式 Hirsch 予想の解決にはこの再帰不等式そのものの強化が必要不可欠になると考えている．特に，4 次元の場合に特化して再帰不等式を強化することが重要な一歩になると考えている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① <u>Noriyoshi Sukegawa</u>,
Improving bounds on the diameter of a polyhedron in high dimensions.
Discrete Mathematics, 2017.
査読有（掲載決定済み）
DOI: 10.1016/j.disc.2017.04.005

② Shinji Mizuno, <u>Noriyoshi Sukegawa</u>, Antoine Deza,
Small degenerate simplices can be bad for simplex methods.
Journal of the Operations Research Society of Japan, 2017.
査読有（掲載決定済み）

〔学会発表〕（計　６　件）

① <u>Noriyoshi Sukegawa</u>,
An asymptotically improved upper bound on the diameter of polyhedra.
10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Budapest, Hungary, May 22-25, 2017.
査読有

② Noriyoshi Sukegawa,
Improving bounds on the diameter of a polyhedron in high dimensions.
Canadian Mathematical Society Winter Meeting 2016, Niagara Falls, Canada, December 2-5, 2016.
査読なし

③ Noriyoshi Sukegawa,
Improving bounds on the diameter of a polyhedron in high dimensions.
International Conference on Continuous Optimization, Tokyo, August 8-11, 2016.
査読なし

④ 北原 知就, 鮏川 矩義,
上下限制約付き線形計画問題に対する二分探索アルゴリズム
最適化：モデリングとアルゴリズム, 政策研究大学院大学, 2016年3月22日

⑤ 北原 知就, 鮏川 矩義,
二分探索法を用いた線形計画問題の解法
日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会,慶應義塾大学, 2016年3月17日-18日.
査読なし

⑥ 鮏川 矩義,
Kalai-Kleitman 不等式から得られる多面体の直径の上界について.
日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会,慶應義塾大学, 2016年3月17日-18日.
査読なし

〔その他〕
ホームページ：
https://sites.google.com/site/nsukeen/

６．研究組織

(1)研究代表者
鮏川 矩義（SUKEGAWA NORIYOSSHI）
中央大学・理工学部・助教
研究者番号：20757710

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし