2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号： ３２６６５
研究種目： 研究活動スタート支援
研究期間： 2015～2016
課題番号： １５Ｈ０６６４１
研究課題名（和文） 量子力学の散乱問題から共形場理論の相関関数へ

研究課題名（英文） From Scattering Problems in Quantum Mechanics to Correlation Functions in Conformal Field Theory

研究代表者
大谷　聡（OHYA, Satoshi）

日本大学・理工学部・助手

研究者番号：４０７５５５４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：3次元以上の有限温度共形場理論の運動量表示2点関数を(量子力学的)厳密S行列の文脈で知られている代数算法を用いて求める方法を開発しました．主な研究成果は次の通りです．まずUnruh効果を使った有限温度共形場理論の作り方を埋め込み法を用いて再構築しました．次に共形対称性の帰結として運動量表示2点関数がある漸化式を満たさなければならないという事を示しました．この漸化式は有限温度の場合の共形Ward-Takahashi恒等式と見なせる物で，この漸化式を解くことで遅延・先進2点関数，時間順序積2点関数，正・負振動数2点Wightman関数など全ての2点関数が任意の次元d(>2)で求まる事を示しました．

研究成果の概要（英文）：I have proposed a new Lie-algebraic approach to compute momentum-space two-point functions of conformal field theory (CFT) at finite temperature in any spacetime dimension d(>2). The keys to this proposal are the Unruh effect and intertwining operator. First, I have revisited thermalization of CFT by the Unruh effect and presented a systematic construction of thermal CFT in terms of the embedding space formalism. Second, I have shown that in thermal CFT the intertwining relations reduce to certain linear recurrence relations for two-point functions in the complex momentum space. These recurrence relations are nothing but the conformal Ward-Takahashi identities at finite temperature. It has been shown that all the momentum-space two-point functions are obtained by solving these recurrence relations.

研究分野： 素粒子論

キーワード： 共形代数　繋絡作用素

１．研究開始当初の背景

本研究が対象とするのは，共形場理論と呼ばれる共形変換の下で不変な相対論的場の量子論です．この共形場理論は１９８０年代中頃から急速に発展し，素粒子論のみならず量子多体系の臨界現象を説明する強力な理論として非常に成功を収めてきました．特に強力なのは，何と言っても相関関数の関数形が共形対称性からほぼ決まってしまうという点でしょう．実際よく知られているように，共形場理論では２点および３点の相関関数までなら，任意次元でその関数形が完全に決まってしまいます. これは１９７０年に A. M. Polyakov が指摘して以来，広く知られた共形場理論の初頭的な結果の１つです．この「共形対称性から相関関数の関数形を決める」という手法は，零温度共形場理論の座標表示相関関数については非常に上手く行って成功を収めてきました.

一方，共形場理論で実際に物理量を計算しようとする場合，往々にして相関関数の運動量表示が必要になってきます．例えば運動量表示の遅延２点関数の虚部は量子臨界系のスペクトル関数を与えますし，久保公式を通じて種々の輸送係数とも関係してきます．原理的には運動量表示相関関数は座標表示相関関数の Fourier 変換をすれば得られるわけですが，この Fourier 変換が曲者で，実際に実行するのは非常に難しいことが知られています．実際，３０年以上の歴史を持つ最もよく理解されている２次元共形場理論でさえ，Fourier 変換を実行して有限温度３点関数が計算されたのは２０１４年なのです.

そこで，計算の面倒な Fourier 変換を経由せずに，有限温度の運動量表示相関関数に対しても共形対称性から直接その関数形を決定したいと思うわけですが，実はこれが今まで全く分かっていませんでした．実際，一部の研究者の間では，「有限温度では温度というスケールが入るのだから共形対称性が明らかに破れる，従って共形対称性から有限温度の相関関数が決定できる訳が無い」という迷信さえあったのです.

２．研究の目的

さて，話は変わって，１次元量子力学には様々な厳密に解ける模型が存在しますが，これら厳密に解ける模型は往々にして高い力学的対称性を持っており，可解性の背後には Lie 環の表現論の構造が隠れていることが昔から知られていました．そして１９９０年代後半，G. A. Kerimov はある種の高い力学的対称性を持った可解模型では，散乱行列(反射・透過係数)が対応する Lie 環の繋絡作用素に他ならないことを看破しました．この Kerimov の方法では，Schrodinger 方程式を解かなくても表現論の知識だけで散乱行列が簡単に計算できます．一方，１９７０年代から，共形場理論の２点関数は共形代数の繋絡作用素の積分核に他ならないことが知られていました(図 1 参照)．本研究の目的は，Kerimov の開発した量子力学的散乱行列の Lie 代数的算法を任意次元の共形場理論へ応用し，これまで計算が困難であった有限温度共形場理論の運動量表示２点関数に対して，対称性に基づく新たな簡便算法を開発することにあります.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{\text{out}} \arrow[r, "A_{\text{out}}"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{H}_{\text{out}} \arrow[d, "S"] \\ \mathcal{H}_{\text{in}} \arrow[r, "A_{\text{in}}"'] & \mathcal{H}_{\text{in}} \end{tikzcd} \qquad A_{\text{in}}S = SA_{\text{out}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_{d-\Delta} \arrow[r, "J^{ab}_{d-\Delta}"] \arrow[d, "G_\Delta"'] & \mathcal{V}_{d-\Delta} \arrow[d, "G_\Delta"] \\ \mathcal{V}_{\Delta} \arrow[r, "J^{ab}_{\Delta}"'] & \mathcal{V}_{\Delta} \end{tikzcd} \qquad J^{ab}_{\Delta}G_{\Delta} = G_{\Delta}J^{ab}_{d-\Delta}$$

図 1．散乱行列理論と共形場理論の繋絡関係式の模式図.

３．研究の方法

以下，項目別に研究手法について述べたいと思います.

(1)　有限温度共形場理論の作り方
まず３次元以上の共形場理論をどうやって有限温度にするか整備する必要があります. ２次元共形場理論ではユークリッド化して円筒へ共形変換すれば有限温度の理論が得られたわけですが，３次元以上ではその様な円筒への共形変換は無いので, 違う方策を練らなければなりません. ３次元以上の共形場理論は Unruh 効果を使って有限温度にすることにします. まずこの方法を表現論が使いやすいように整備します.

(2)　繋絡作用素
共形場理論の２点関数は共形代数の繋絡作用素の積分核に他ならないということは１９７０年代から分かっていたのですが, これらの先行研究は全て零温度の共形場理論に対しての結果でした. 有限温度の場合でも使えるように整備し直す必要があります. 特に Unruh 効果で有限温度にした理論では, 時間並進が Lorentz ブーストなどの SO(1,1)変換で与えられるので，SO(1,1)変換の生成子が対角化される表現空間の基底を真面目に構成する必要があります.

(3)　Fourier 変換
Kerimov の散乱行列理論での経験から, 繋絡関係式を使うと運動量表示２点関数に対する漸化式が得られることが予想されます. この漸化式を解くことで有限温度の相関関数を求めようと思うわけですが, そうやって得られた相関関数が本当に Fourier 変換の結果と一致するのか確認しなければなりません. それを行う為にはただ闇雲に積分をやっていてもとても計算出来る代物ではないので, うまい計算法を編み出す必要があります.

４．研究成果

以下, 項目別に研究成果についてまとめたいと思います.

(1)　有限温度共形場理論の作り方
d 次元共形場理論を有限温度にするには, まず理論を Rindler の楔形領域, 光円錐, または２重光円錐に制限して, 次に時間座標を Lorentz ブースト, スケール変換, またはある種の共形変換の変換パラメータと同一視すれば有限温度になる, ということは１９８０年代から数学の作用素環の分野で分かっていたのですが(図 2 参照), 物理学者から見てとても使い易いと言える代物ではありませんでした. これを d 次元 Minkowski 時空を d+2 次元空間に埋め込む方法を用いることで, 物理学者なら誰でも分かるように明快に再構成しました. これは今まで誰も与えなかった方法で, 今後はこの方法が標準化していくものと期待されます. また, 今後は Minkowski 時空だけではなく, 他の時空(例えば de Sitter 時空など)に対しても同様の方法が展開されていくと期待されます. また, こうやって有限温度にした共形場理論では, 時間並進群は全て SO(1,1)で与えられる, ということを明確に指摘したのも今後の発展で重要な点です.

(2)　繋絡作用素
Unruh 効果で有限温度にした共形場理論では時間並進群が Lorentz 群 SO(1,1)で与えられるのですが, これが対角化される表現空間の基底を具体的に構成しました. そして, これを使って繋絡関係式と呼ばれる演算子恒等式の行列要素を計算することで, 運動量表示２点関数の満たすべき複素運動量空間での漸化式を導きました. これは有限温度での共形 Ward-Takahashi 恒等式と見なせる物で, この研究により初めて与えられたものです. 更にこの漸化式を解くことで, 遅延２点関数や先進２点関数, 正振動数 Wightman 関数や負振動数 Wightman 関数などが全て求まることを示しました. 有限温度共形場理論は AdS/CFT 対応の研究などでも重要で, 有限温度の運動量表示相関関数も対称性の議論だけでここまで決まる, という例を示したのは非常に意義深いと思います. また応用上重要な一般のテンソル場の相関関数への拡張も可能な方法論なので, 今後の発展が期待できると言えるでしょう.

(3)　Fourier 変換
Unruh 効果を用いて有限温度にした共形場理論は双曲空間上の場の量子論になってしまうのですが, その為 Fourier 変換をするには双曲空間上の調和解析の知識を使わないといけません. この程度の調和解析は数学の方で良く分かっているのですが, 下手な座標系を使うととても Fourier 積分が計算出来る代物にはならないので, うまい座標系を選んで計算してあげなければなりません. これを全てきちんとやって, Fourier 変換の結果が漸化式の解の結果と一致することを確かめました. これは只の計算なのですが, 今まで誰もちゃんと計算していなかったものなので, その意義は深いと思います.

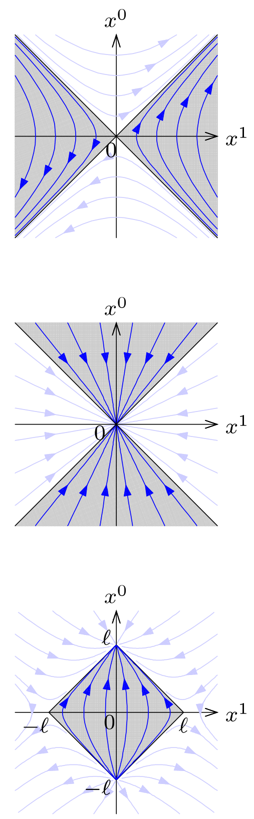

図 2. Rindler の楔形領域, 光円錐, ２重光円錐と SO(1,1)Killing ベクトル場の流れ.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）

① Satoshi Ohya, Intertwining Operator in Thermal CFT_d, International Journal of Modern Physics A, 査読有, Volume 32, 2017, 1750006
DOI:10.1142/S0217751X17500063

〔学会発表〕（計５件）

① 大谷　聡, Intertwining Operator in Thermal CFT_d, 日本物理学会第７２回年次大会, ２０１７年３月２０日, 大阪大学豊中キャンパス(大阪府・豊中市)

② 大谷　聡, A Simple Derivation of Finite-Temperature CFT_2 Correlators from Rindler-AdS_3, 日本物理学会第７１回年次大会, ２０１６年３月２２日, 東北学院大学泉キャンパス(宮城県・仙台市)

③ Satoshi Ohya, Recurrence Relations for Finite-Temperature Correlators via AdS2/CFT1, Developments in String Theory and Quantum Field Theory, ２０１５年１１月１０日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府・京都市)

④ 大谷　聡, Recurrence Relations for Finite-Temperature Correlators via AdS2/CFT1, 第５回日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウム, ２０１５年１０月２５日, 日本大学理工学部(東京都・千代田区)

⑤ 大谷　聡, Recurrence Relations for Finite-Temperature Correlators via AdS2/CFT1, 日本物理学会２０１５年秋季大会, ２０１５年９月２７日, 大阪市立大学杉本キャンパス(大阪府・大阪市)

〔その他〕
ホームページ等
http://aries.phys.cst.nihon-u.ac.jp/~ohya/

６．研究組織
(1)研究代表者
大谷　聡（OHYA, Satoshi）
日本大学・理工学部・助手
研究者番号：４０７５５５４２