様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １０ 日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０００６

研究課題名（和文）計算論的ラムゼー理論の開発を通じたNP困難性の拡張

研究課題名（英文）Extending NP-Hardness via the development of computational Ramsey Theory

研究代表者
天野　一幸（Amano, Kazuyuki）

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：３０２８２０３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は，組合わせ論分野における種々の問題が，NP問題の特定のインスタンスとして表現できるとの視点に立ち，これらに対する解構造等の解析を行うことを通じてその困難さの要因を明らかにしようとしたものである．特に，計算機実験と理論的解析の組み合わせによるアプローチを特徴とする．主に計算複雑性の理論で表れる様々な問題に対して上記アプローチを適用し，多くの進展を得ることができた．これらの結果は，７編の論文と１４件の学会発表を通じて公表した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
我々が日頃直面する様々な計算問題がNP困難性を満たすことは良くあるが，近年の計算機やアルゴリズムの爆発的進展によって，このことは解きたい問題自身が計算不能であることをもはや意味しない．また，NP困難性は通常，ユーザーが直面する特定のインスタンスの複雑さについては手掛かりを与えない．本研究では，特に計算複雑性に関する様々な問題について進展を与えるとともに，その問題自身の難しさについても多くの知見を得ることができた．これは，上記の状況を打破し，個別インスタンスの困難性を議論可能な枠組み構築への端緒となる重要な成果であると考える．

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to investigate the complexity of various hard problems in combinatorics. We treat such a problem as a particular instance of NP problem, and try to develop the framework that can discuss the complexity of a particular instance instead of the usual worst case scenario. We apply an approach that combines the computer experiments and theoretical arguments, which is a unique feature of this research. As a result, we have succeeded to make large progress on various problems especially that appeared in the computational complexity theory. We published 7 papers and gave 14 presentations during this work.

研究分野：計算量理論

キーワード：計算量理論　下界　離散数学　P≠NP予想　論理回路

１．研究開始当初の背景

　ラムゼー数の決定問題を始めとする，様々な組合わせ論的問題は，その問題のシンプルさに反して，しばしば非常に困難な問題となる。例えば，完全グラフの辺を２色で塗り分けたときに，指定されたサイズの単色完全グラフの存在が保証される最小頂点数として定められるラムゼー数は，これを決定するための多大な努力にも関わらず，基本的な結果が得られた研究の初段にあたる１９３０年代から今日に至るまで本質的な進展が得られていない。本研究は，この種の問題がなぜこれほどまでに難しいのかを数学的に明らかにしたい，という思いに強く動機づけられたものである。

　特に，本研究ではこれらの問題が充足可能性問題や整数計画問題の特定のインスタンスとして容易に定式化できることに着目する。これまでの計算量理論の最大の成功例ともいえる NP 完全性の理論は，最悪のインスタンスに対する時間計算量が（P≠NP の仮定のもので）大きいことを保証するが，特定のインスタンスの困難さについては何の手がかりをも与えない。

　特定インスタンスに対する困難性の議論は，数学的問題に対する理論的興味のみならず，実用面においても重要な意味を持つ。近年の計算機環境や数理計画ソルバの急激な進化に伴い，ユーザが直面する問題が NP 困難であることは，その問題が現実的に解答不能であることをもはや意味しない。比較的大規模な問題であっても，その構造によっては容易に解ける場合が多くある一方，規模の小さな問題でも非常な困難を伴う場合もある。現状，特定インスタンスに関する困難さの解析は，専らアドホックな実験的議論が用いられており，これを厳密に議論可能な理論の構築がまさに求められている。

２．研究の目的

　本研究の最大の目的は，組合わせ論分野における困難な問題に対する解空間の構造解析等を通じて，特定インスタンスの困難さを議論できる枠組みの開発を行うことであった。

　組合わせ論の研究や，あるいは，現実場面において直面する様々な問題は，実際には充足可能性問題や整数計画問題の特定のインスタンスとして容易に表現できることが多い。誤解を恐れずに記すならば，組合わせ論における数多くの研究テーマは，単に NP 問題の特定インスタンスについてこれを解こうとしているだけである，という言い方も可能である。さまざまな数学的テクニックを用いて解ける場合も多いが，サイズが小さな場合のラムゼー数の決定問題に代表されるようなある種の問題は，知られる最良の結果が実際的にはしらみつぶし的手法に基づいている場合も多く，これは，例えば，我々が充足可能性問題において困難なインスタンスに対峙している場合にとる手法に近い。

　以上の観察から，本研究では，特に計算量理論に関する研究過程等で多く現れる組合わせ論的諸問題に対し，計算機実験と理論的解析を高度に融合することで，詳細な解析を行い，これら問題に内包される困難さを明らかにすることを目的とする。また，この解析の過程を通じて，その問題自身の困難さを決定づける要素をもまた明らかにすることを目指したものである。究極的な目標として，新たな帰着の概念等の開発を通じて，特定インスタンスの困難さを議論できる枠組みを構築することをも視野に入れたものである。

３．研究の方法

　本研究におけるアプローチの最大の特徴は，その議論の過程において，大規模な計算機実験と理論的解析の融合的アプローチをとることである。

　特に研究代表者が強い興味を持つ，計算量複雑性理論の研究過程で現れるさまざまな組合わせ論的問題に対し，まず，大規模な計算機実験を通じて，その解自身や解空間の構造に対する知見を得る。得られた知見を数理的に厳密に定式化し，これに対する数学的証明を与えることで，計算機実験の到達し得ない大きなインスタンスに対する一般的性質を明らかにする，といったアプローチをとる。この種の問題の解構造には，数学的に容易に記述可能な性質を持つ場合や，最適解自身がある種のランダム性を持ち，容易な数学的記述を持たないことが示唆される場合がある。例えば，ラムゼー数の決定問題等，解決困難とされる問題に対しては後者のケースが多く現れることが想定される。研究の初段においては，さまざまな具体的問題をとりあげ，これらに対する進展を与えるとともに，これら問題自身に内在する困難さの要因をも明らかにすることを目指す。多くの具体的問題で得られた知見をもとに，充足可能性や数理計画問題の個別インスタンスに対してその困難さを特徴付ける要因を明らかにすることを目指す。

４．研究成果

　本研究においては，特に計算複雑性の理論において現れる様々な組合わせ論的問題に，上記の観点から取り組み，多くの成果を挙げることができた。これらは，国際会議論文を含む７編の論文(うち２編は採録決定済み未刊行)，および，14 件の国内外の学会発表を通じて公開した。主要な研究成果４点について，以下に説明する。

（1）しきい値論理素子を用いた論理回路モデルでもっとも単純なものの一つである論理関数の多項式しきい値表現に関する計算量尺度である次数，表現長，および，重さについて解析を行った。これらを求める問題が，自然な形で整数計画問題として定式化できることに着目し，整数計画ソルバを用いて具体的な解空間構造を求めそこから得られる知見を理論的枠組みの中で定式化した。

その結果，特に，多項式しきい値表現の次数に対して成立するＸＯＲ補題と呼ばれる顕著な性質が，表現長や重みといった他の尺度に対しては成立しないことを始めて明らかにすることに成功した。加えて，これら尺度が線形計画問題の整数性ギャップ，テンソル積で与えられる問題の解の大きさ，および，論理関数のフーリエノルムといった様々な尺度と密接な関係にあることを明らかにした。

これらの結果は，国際会議 LATA にて発表を行うとともに，その後得られた結果を加えてジャーナル論文としてとりまとめ国際論文誌に投稿し採択された。

（2）論理関数の計算困難性を表すとされる尺度には，感受度，決定木深さ，実多項式次数等さまざまなものが提案され研究されている。これらの尺度の間の相互関係について，これまで知られているものより厳密な関係式を得ることを目指した。

具体的には，計算機による大規模な計算を通じて，感受度が３以下の論理関数全ての列挙に初めて成功した。また，得られた全ての関数群について，上記の尺度群の値を実際に計算することで,従来知られる最大ギャップに等しいギャップを持つ,新たな関数を得ることができた。これらの関数群の性質をより詳細に検討することで，更なる結果の一般化が期待できる。この結果は，国際会議 ISIT に採択され発表を行った。

（3）離散構造の性質に関する問題として，古くから研究されているポリオミノの 2 次元平面へのタイリングに関して，p4 と呼ばれる群構造に基づくタイリングに関する新たな性質を明らかにすることに成功した。

特に，SAT ソルバを用いた大規模な計算機実験，および，文字列の因数分解の性質に基づく理論的解析といったユニークな手法を高度に組み合わせることで，単一のポリオミノが持つ最大タイリング数は３以上であり，かつ，この値はある大きな定数で抑えられとする顕著な結果を得ることができた。

本研究成果を，国際会議 ISAAC において発表するとともに，会議で発表された優秀論文に対して与えられる国際論文誌への招待を受け，より厳密な査読ののち採択済みである。

（4）論理関数の回路計算量に関する基礎的問題として，2 層の多数決素子を用いて>多数決関数を計算する回路を構成する方法に関して検討を行った。特に，計算機実験により得られたデータを理論的枠組みのもとで一般化するアプローチにより，従来研究でその存在が未解決とされていた回路の構成を与えることに成功した。

次に，得られた回路を一般化し理論的な正当性の証明を与えることで，汎用的な結果へと拡張することに成功した。こうして得られた構成法は，これまで知られたものより各素子の入次数において優れたものである。また，一般化の過程を通じて得られた洞察をもとに，この種の回路の構成とグラフ理論で広く研究される拡張グラフのある種の一般化との間に等価性があることをも明らかにすることに成功した。所望のパラメータを充足する拡張グラフを具体的に構成することは一般的に困難であることから，本研究によって得られた回路の更なる効率化の困難性を示唆するものと解釈できる。この結果は，国内英語論文誌，および，国際会議 MFCS において発表し，得られたフィードバック等も考慮に入れながら更なる拡張について現在も検討中である。

以上述べてきた主な成果に加えて，例えば，様々な形状を持つ３次元物体の立方体への最疎な充填方法や，ある種の施設配置問題における効率的アルゴリズムの構築や最適解の構造の解析等に対しても興味深い成果を得ることができた。

これらの成果に共通するアプローチとして，大規模な計算機実験を本質的に含む点が挙げられ，これは正に本研究における大きな独自性として追及してきたものである。この点において本研究は大きな成果を挙げたということができる。残念ながら，究極的な目標である個別インスタンスの困難さが導出可能な枠組みを構築するには至らなかったものの，本研究によって得られた様々な個別問題の計算困難さに対する知見は，この大きな目標へ向けた端緒として非常に有用なものといえる。これについては，平成３０年度に開始した，本研究課題の発展的課題と位置付けられる科研費研究課題（基盤研究(C) 課題番号 18K11152）において引き続き探求を行うこととする。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① Kazuyuki Amano, Depth Two Majority Circuits for Majority and List Expanders,

Proceedings of the 43rd International Symposium on Mathematical Foundation of Computer Science (MFCS2018), LIPIcs 117, Article 81, pp.81:1 – 81:13, 2018 (査読有)
DOI:10.4230/LIPIcs.MFCS.2018.81

② Kazuyuki Amano and Masafumi Yoshida, Depth Two (n-2)-Majority Circuit for n-Majority, IEICE Trans. Fund., Vol E101-A, No. 9, pp. 1543 – 1545, 2018 (査読有)
DOI:10.1587/transfun.E101.A.1543

③ Kazuyuki Amano and Yoshinobu Haruyama, On the Number of p4-tilings by an N-omino, Proceedings of the 28th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2017), LIPIcs 92, Article 5, pp. 5:1 – 5:12, 2017 (査読有)
DOI:10.4230/LIPIcs.ISAAC.2017.5

④ Kazuyuki Amano, Enumeration of Boolean Functions of Sensitivity Three and Inheritance of Nondegenracy, Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2017), pp. 251 – 255, 2017 (査読有)
DOI:10.1109/ISIT.2017.8006528

⑤ Kazuyuki Amano, On XOR Lemma for Polynomial Threshold Weight and Length, Proceedings of the 10th International Conference on Language and Automata Theory and Applications (LATA 2016), LNCS 9618, pp. 259 – 269, 2016 (査読有)
DOI:10.1007/978-3-319-30000-9_20

〔学会発表〕（計 14 件）
① 木村 健斗, 天野 一幸, 凹凸のあるピースにおけるアンチスライドパズルの解析, 組合わせゲーム・パズルプロジェクト(CGP) 第１４回研究集会（電通大, 2019.3）

② 佐藤 大河, 天野 一幸, ポリオミノの isohedral タイリング数の解析, 情報処理学会 第 171 回アルゴリズム研究会（大阪, 2019.1）

③ Kazuyuki Amano, Shin-ichi Nakano, An Approximation Algorithm for the 2-Dispersion Problem, 電子情報通信学会 コンピュテーション研究会（京都大, 2018.10）

④ 木村 健斗, 天野 一幸, アンチスライドパズルの解析（ポスター発表), 日本 OR 学会 SSOR2018, (群馬県水上, 2018.8)

⑤ Kazuyuki Amano and Shin-ichi Nakano, Away from Rivals, The 30th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2018) (Manitoba, Canada, 2018.8)

⑥ 吉田 昌史, 天野 一幸, 多数決関数を計算する２層の多数決回路について, 2017 年度冬の LA シンポジウム（京都大, 2018.2）

⑦ 天野 一幸, Sensitivity が 3 の論理関数について, 電子情報通信学会 コンピュテーション研究会（広島大, 2016.12）

⑧ 天野 一幸, 舘 将馬, 論理関数の PTF 表現の XOR 補題について, 2016 年夏の LA シンポジウム（奈良県生駒郡, 2016.7）

⑨ 天野 一幸, 多項式しきい値表現の XOR 補題と整数計画のテンソル積, 日本 OR 学会 最適化の基盤とフロンティア研究部会（東京理科大, 2016.4）（招待講演）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.cs.gunma-u.ac.jp/~amano/ （研究代表者ホームページ）

※科研費による研究は，研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため，研究の実施や研究成果の公表等については，国の要請等に基づくものではなく，その研究成果に関する見解や責任は，研究者個人に帰属されます。