

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K00025

研究課題名(和文)代数問題に対する摂動の影響の研究

研究課題名(英文)Study of the Influence of Perturbations on Algebraic Problems

研究代表者

関川 浩 (Sekigawa, Hiroshi)

東京理科大学・理学部第一部応用数学科・教授

研究者番号：00396178

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：代数問題において、多項式や方程式の係数が誤差を含むと問題が無意味となることがある。そういった場合に係数を摂動した際の影響を調べ、「最近接問題」という概念を利用して意味のある問題を設定し、その問題を効率的に解くアルゴリズムを、主に代数方程式に関する問題に対して構築した。また、構築したアルゴリズムを、信頼性を損うことなく効率化する安定化手法の利用法について研究した。主な成果は以下である。(1)与えられた代数方程式から一番近く、指定された解を持つ代数方程式を構成するアルゴリズム、(2)値が誤差を含む場合の多項式補間アルゴリズム、(3)安定化手法の有効性の検証および新しい利用法。

研究成果の概要(英文)：Sometimes algebraic problems become meaningless due to errors in the coefficients of polynomials and equations in the problems. In such cases, we investigate the influence of perturbations of coefficients and pose meaningful related problems using the concept of "nearest problems." We construct algorithms that efficiently solve the posed problems, especially problems of algebraic equations. Furthermore, we study utilization methods of stabilizing techniques that make the constructed algorithms more efficient. Some main results are as follows: (1) Algorithms to construct the polynomial that is nearest to a given polynomial among the polynomials with given zeros. (2) Algorithms for interpolation of polynomials whose values contain errors. (3) Confirmation of effectiveness of stabilization techniques and new applications of stabilization techniques.

研究分野：計算代数

キーワード：摂動 誤差 安定性 多項式 代数方程式 数値数式融合計算 安定化理論

1. 研究開始当初の背景

計算機により数値や数式を計算する場合、数値計算、数式処理という二つの計算法がある。現在、科学技術計算には数値計算を主に用いる。これは、数式処理は正確な計算を用いるため計算量が多いこと、入力データは正確であるという前提のため、観測や計測による数値、あるいはそれから計算された数値などの誤差を含むデータが入力の場合、計算結果が真の値から掛け離れたものになる恐れがあるからである。計算量については計算機の高速化により、以前程には問題にならなくなってきた。よって、数式処理によって誤差を含むデータも扱うことが可能となれば、信頼性の高い計算法によって実問題を扱うことが可能となる。そのため、研究代表者らのグループは、誤差を含むデータも扱える数式処理を目指して、

- (1) 「誤差を含む代数問題に対する信頼性の高い数値数式融合計算の研究」(平成 21～23 年度科学研究費補助金基盤研究 (C) 採択課題、以下、「採択課題 1」と略記)、
- (2) 「誤差を含む代数問題に対する数値数式融合計算の研究」(平成 24～26 年度科学研究費補助金基盤研究 (C) 採択課題、以下、「採択課題 2」と略記)、

において研究を進めてきた。採択課題 1 では、入力に誤差を含む代数問題が不安定な場合、すなわち、係数の摂動がどんなに小さくても解が劇的に変わる場合(代数方程式の実根の数など)、そのままでは計算した結果に意味がなくなるので、関連する適切な問題を再設定し、その問題を解くアルゴリズムを、数式処理を基本として構築した。さらに、数値数式融合計算(数式処理に数値計算を援用する計算手法)とくに安定化理論を用いることにより、数式処理の信頼性を損なうことなくアルゴリズムの効率化を目指した。採択課題 2 では、問題が安定か否かを判定し、採択課題 1 では扱わなかった不安定な場合に、安定性解析(注目している性質が保たれる係数の摂動限界)を行うことを新たな課題として追加した。

以上の研究を進める過程で、代数問題に関し、摂動の与える影響を調べた上で「最近接問題」という概念を利用すれば、不安定な場合に統一的に問題を再設定できるという認識を得るとともに、不安定な場合の安定性解析も「最近接問題」の一種ととらえ得ることに気づいた。

「最近接問題」とは、着目している性質を持たない入力に対し、その性質を持つような与えられた入力にもっとも近い対象を探す問題である。たとえば、GCD(最大公約多項式)が本来 1 次以上となる二つの多項式が誤差のため互いに素な多項式 f, g になったとする。このとき、 f, g の誤差範囲内から取った多項式 p, q の GCD は最高何次となり得るかは、20 年程前より数値数式融合計算の分野で取り上げられてきた問題だが、GCD の次数

を変えて最近接問題を解いた結果が誤差範囲内にあるか否かを見ることにより解答可能である。二つの多項式が互いに素な場合、係数の摂動が小さければ、互いに素という性質は保たれる(安定な性質)。係数を正確とみなしたときに f と g が互いに素である場合、 f, g の誤差範囲内から取った任意の多項式 p, q はつねに互いに素となるかが問題となるが、これは、 f, g から一番近く(目的に応じて距離の測り方は変わる) GCD が 1 次以上となる多項式の対 p', q' までの距離が分かればよい。つまり、「互いに素」の否定である「GCD が 1 次以上」という性質に注目すれば、安定性の問題を「最近接問題」ととらえることが可能である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、種々の代数問題において多項式や方程式の係数を摂動した際の影響を調べることにより、多項式や方程式の係数が誤差を含む代数問題に対して、解を適切に計算する効率的なアルゴリズムを構築することにある。「1. 研究開始当初の背景」に述べた通り、代数問題の入力が誤差を含むと問題が意味をなさなくなり、目的に応じて適切な問題を再設定する必要が生じる場合が多々あるが、「最近接問題」という概念を利用することにより、適切な問題を統一的に再設定できるという認識を得るに至った。線形代数の範疇に収まる問題については、すでに実用レベルでこの目的は達成されているので(数値線形代数)、本研究では、主に非線形の代数方程式に関わる問題に対し、必要に応じて適切な問題を再設定した上で、その問題を効率的に解くアルゴリズムを構築することを目指す。

3. 研究の方法

「2. 研究の目的」に記述した目的を達成するため、各代数問題に対し、以下の三つの課題に分けて研究を進めることとした。

【課題 1】代数問題に対し、多項式や方程式の係数の摂動が解に与える影響を理論的に解析する。

【課題 2】課題 1 の結果を利用し、係数に誤差のある代数問題に対し最近接問題を考え、不安定な場合は再設定した問題の解、不安定な場合は安定性解析の結果を計算するアルゴリズムを構築する。

【課題 3】数値数式融合計算、とくに安定化理論を用いることにより、信頼性を損なうことなく、課題 2 において構築したアルゴリズムを効率化する。

代数問題としては主に非線形の代数方程式に関わるものを考察する。代数方程式は理論上、応用上ともに重要であるが、連立一次

方程式に関わる問題、一変数代数方程式の一部の問題を除き、最近接問題の観点から見て、十分な結果が得られているとはいいい難いからである。具体的に扱う問題は応用を意識し、与えられた領域内の根の数、近接根間の距離などを取り上げる予定である。一つの対象に対して複数の観測データが存在する場合もあるので、複数のデータに対する最近接問題も研究の対象とする。

4. 研究成果

研究成果を5項目に分けて記述する。各項目冒頭のカッコ内に、その成果が課題1~3のどれに対応するものであるかを示す。

- (1) (課題1) 多変数多項式系がグレブナ基底をなす場合、さらに若干の条件を追加して、多項式系の共通零点(連立代数方程式の解)が係数の摂動に対して安定となることを定性的に示すことができた(学会発表、)。なお、まったく一般の場合にはこの性質は成り立たない。
- (2) (課題1、2) 指定した点で値が0となる多項式で、与えられた多項式に一番近いもの(最近接多項式)を求める問題について以下の成果を得た。
 - 一変数多項式が複数、指定した点が一つの場合に最近接多項式を構成するアルゴリズム(雑誌論文、)。
 - 一変数多項式が一つ、指定した点が複数の場合に最近接多項式までの距離の表示式、最近接多項式を構成するアルゴリズム(雑誌論文、学会発表、)。
- (3) (課題1、2) ブラックボックス(入力を与えると出力が得られる)として与えられている多変数多項式を具体的に式で表す問題に対し、ブラックボックスの出力が誤差を含む場合に頑健なアルゴリズムを提案した(雑誌論文、学会発表、)。
- (4) (課題3) 課題3における主要な計算手法である安定化理論に関して以下の成果を得た。
 - 安定化理論を、最短ベクトルを求める問題、行列の有理標準形の計算に適用し、どのような場合に有効であるか検証を行った(雑誌論文、学会発表)。
 - 安定化理論に計算履歴を合わせて利用することにより、近似計算によっても正確な出力を得るISCZ法を、最短ベクトルを求める問題、一般逆行列の計算、行列の有理標準形の計算、グレブナ基底の計算、一変数代数方程式の実根を数え上げるスツ

ルムのアルゴリズムに適用し、有効性について検証した(雑誌論文、)、学会発表、)。

- (5) ある種の代数系を分類する問題、Youngの不等式に関する問題に、本研究課題に密接に関わる数式処理の成果を利用した(雑誌論文、)。

5. 主な発表論文等

(雑誌論文)(計14件)

Dai Numahata and Hiroshi Sekigawa, Robust algorithms for sparse interpolation of multivariate polynomials, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, 印刷中

Yuji Kobayashi, Kiyoshi Shirayanagi, Sin-Ei Takahasi, and Makoto Tsukada, Classification of three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field, Communications in Algebra, 査読有, Vol. 45, 2017, pp. 5037 - 5052

DOI: 10.1080/00927872.2017.1313426

Hiroshi Sekigawa, The nearest polynomial to multiple given polynomials with a given zero in the real case, Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 681, 2017, pp. 167 - 175

DOI: 10.1016/j.tcs.2017.03.033

片山彰之、白柳潔、安定化手法に基づく計算履歴法とLLL簡約アルゴリズムへの適用、数式処理、査読無、Vol. 23、No. 2、2017、pp. 63 - 73、DOI、URLなし

見田大志、白柳潔、計算履歴法の一般逆行列計算に対する有効性について、数式処理、査読無、Vol. 23、No. 2、2017、pp. 58 - 62、DOI、URLなし

片山彰之、白柳潔、有理標準形の計算と計算履歴法との相性、数式処理、査読無、Vol. 23、No. 2、2017、pp. 45 - 57、DOI、URLなし

Yasuo Nakasuji, Kiyoshi Shirayanagi, and Sin-Ei Takahasi, Young's inequality is a Heaven's blessing, Linear and Nonlinear Analysis, 査読有, Vol. 3, No. 3, 2017, pp. 337-342, <http://www.ybook.co.jp/online-p/LNA/Open/1/Inav3n3p337-0a/index.html>

櫻井優太、関川浩、2根を指定した場合の最近接多項式、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、No. 2054、2017、pp. 162 - 167、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2054-18.pdf>

片山彰之、白柳潔、安定化理論を用いた有理標準形の導出、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、No. 2054、2017、pp. 14 - 24、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2054-02.pdf>

永嶋裕樹、白柳潔、安定化手法に基づく計算履歴報とLLL アルゴリズムへの適用、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、No. 2054、2017、pp. 1 - 13、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2054-01.pdf>

Dai Numahata and Hiroshi Sekigawa, An algorithm for symbolic-numeric sparse interpolation of multivariate polynomials whose degree bounds are unknown, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, Vol. 51, No. 1, 2017, pp. 18 - 20

DOI: 10.1145/3096730.3096734

Akiyuki Katayama and Kiyoshi Shirayanagi, A new idea on the interval-symbol method with correct zero rewriting for reducing exact computations, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, Vol. 50, No. 4, 2016, pp. 176 - 178

DOI: 10.1145/3055282.3055295

伊井誠和、白柳潔、安定化手法の発展形ISCZ法のスツルムアルゴリズムへの適用とwebアプリへの応用、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、No. 1955、2015、pp. 13 - 26、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1955-02.pdf>

永嶋裕樹、白柳潔、安定化手法の最短ベクトルアルゴリズムへの適用について、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、No. 1955、2015、pp. 1 - 12、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1955-01.pdf>

[学会発表](計 18 件)

佐藤洋祐、深作亮也、関川浩、パラメトリックな連立代数方程式の根の連続性について、Risa/Asir Conference 2018、2018年3月26日、金沢大学(石川県・金沢市)
若月雄麻、関川浩、複数の点の値が指定された場合の最近接多項式、Risa/Asir Conference 2018、2018年3月24日、金沢大学(石川県・金沢市)

若月雄麻、関川浩、複数の零点を指定した場合の最近接多項式~簡潔な距離表示について~、RIMS 共同研究(公開型)、Computer Algebra Theory and its Applications、2017年12月21日、京都

大学(京都府・京都市)

北見宗士、関川浩、複数の零点を指定した場合の最近接多項式~2重根を持つ場合~、RIMS 共同研究(公開型)、Computer Algebra Theory and its Applications、2017年12月21日、京都大学(京都府・京都市)

Dai Numahata and Hiroshi Sekigawa, Robust algorithms for sparse interpolation of multivariate polynomials, 42nd International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2017), 2017年7月26, 27日, カイザースラウンテルン(ドイツ)

Yosuke Sato and Hiroshi Sekigawa, On continuity of the roots of a parametric zero dimensional multivariate polynomial ideal, 23rd Conference on Applications of Computer Algebra (ACA2017), 2017年7月18日, エルサレム(イスラエル)

朝田高行、関川浩、複数の零点を指定した場合の最近接多項式、Risa/Asir Conference 2017、2017年3月28日、金沢大学(石川県・金沢市)

片山彰之、白柳潔、計算履歴法の効率化とグレブナ基底計算への応用、京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」、2016年12月7日、京都大学(京都府・京都市)

Dai Numahata and Hiroshi Sekigawa, An algorithm for symbolic-numeric sparse interpolation of multivariate polynomials whose degree bounds are unknown, 41st International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2016), 2016年7月20, 21日, ウォータールー(カナダ)

Akiyuki Katayama and Kiyoshi Shirayanagi, A new idea on the interval-symbol method with correct zero rewriting for reducing exact computations, 41st International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2016), 2016年7月20, 21日, ウォータールー(カナダ)

Dai Numahata and Hiroshi Sekigawa, Degree estimate for black-box multivariate polynomials in symbolic-numeric sparse interpolation, Milestones in Computer Algebra (MICA2016), 2016年7月18日, ウォータールー(カナダ)

片山彰之、白柳潔、安定化手法に基づく計算履歴法とLLL 簡約アルゴリズムへの適用、日本数式処理学会合同分科会、2016年1月24日、名古屋大学(愛知県・名古屋市)

見田大志、白柳潔、計算履歴法の一般逆

行列計算に対する有効性について、日本数式処理学会合同分科会、2016年1月24日、名古屋大学（愛知県・名古屋市）
片山彰之、白柳潔、有理標準形の計算と計算履歴法との相性、日本数式処理学会合同分科会、2016年1月24日、名古屋大学（愛知県・名古屋市）
櫻井優太、関川浩、2根を指定した場合の最近接多項式2根、京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究 Computer Algebra and Related Topics」, 2015年12月4日、京都大学（京都府・京都市）
片山彰之、白柳潔、安定化理論を用いた有理標準形の導出、京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究 Computer Algebra and Related Topics」, 2015年12月2日、京都大学（京都府・京都市）
永嶋裕樹、白柳潔、安定化手法に基づく計算履歴報とLLLアルゴリズムとの融合、京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究 Computer Algebra and Related Topics」, 2015年12月2日、京都大学（京都府・京都市）
Hiroshi Sekigawa, The nearest polynomial with two or more given zeros, Third Workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation (HMSNC2015), 2015年8月11日, 北京(中国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

関川 浩 (SEKIGAWA, Hiroshi)
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：00396178

(2) 研究分担者

白柳 潔 (SHIRAYANAGI, Kiyoshi)
東邦大学・理学部・教授
研究者番号：80396176