

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K00034

研究課題名(和文) レベル依存型構造化マルコフ連鎖と待ち行列の研究

研究課題名(英文) Study of level-dependent structured Markov chains and queues

研究代表者

増山 博之 (Masuyama, Hiroyuki)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：60378833

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：まず，漸近的レベル独立性をもつ上方ブロック・ヘッセンベルグ・マルコフ連鎖の劣指数的漸近解析を行った．次に，ブロック単調なマルコフ連鎖の定常分布の最終列ブロック増大切断近似に対する計算可能な誤差上界を与えた．これに関連して，M/G/1型マルコフ連鎖の最終列ブロック増大切断近似の収束速度を解析した．ついで，一般的なレベル依存型構造化マルコフ連鎖を対象とし，定常分布の最終列ブロック増大切断近似に対する計算可能な誤差上界，ならびに，北西角切断の正規化基礎行列に関する極限公式を導出した．また，特別な2次元反射型ランダムウォークの定常分布に対する準出生死滅過程近似の計算可能な誤差上界を与えた．

研究成果の概要(英文)：We first studied the subexponentially asymptotic analysis of upper block Hessenberg Markov chains with asymptotic level independence. Next, we derived computable upper bounds for the last-column-block-augmented truncation approximation to the stationary distribution in block-monotone Markov chains. Associated with this result, we also studied the convergence speed of the last-column-block-augmented truncation approximation of M/G/1-type Markov chains. Then, for general level-dependent structured Markov chains, we presented computable upper bounds for the last-column-block-augmented truncation approximation to the stationary distribution and a limit formula for the normalized fundamental matrix of the northwest-corner truncation. In addition, we derived computable upper bounds for the quasi-birth-and-death approximation to the stationary distribution in a special two-dimensional reflecting random walk.

研究分野：マルコフ連鎖と待ち行列理論の研究

キーワード：マルコフ連鎖 待ち行列理論 漸近解析 切断近似 誤差評価 数値計算

## 1. 研究開始当初の背景

今世紀に入り、再試行や途中退去のある待ち行列のように、レベル依存型(あるいは、状態依存型)とよばれる待ち行列の研究が盛んに行われるようになった。なかでも、セミ・マルコフ性を有するモデルのクラスが研究の中心にあり、そうした待ち行列の系内客数過程は、到着や退去といった事象の発生時刻で観測すると、レベル依存型構造化マルコフ連鎖(LDSMC: Level-Dependent Structured Markov Chain)となる。

離散時間 LDSMC の推移確率行列(以下、連続時間モデルの場合には、推移率行列と読み替える)は、状態空間の要素を適切な順序で整列させると、ブロック構造を有する。このことから、LDSMC はブロック構造化マルコフ連鎖(Block-Structured Markov Chain)とよばれることもある。

標準的な LDSMC は、レベル(主変数)とフェーズ(背後状態)の2変数からなるマルコフ連鎖であり、主変数であるレベルの値に依存した推移則に従う。そのため、LDSMC は非常に一般性が高く、従来の待ち行列研究で扱われた多くのマルコフ連鎖を表現できる。

例えば、集団マルコフ型到着過程(BMAP: Batch Markovian arrival process)と一般的なサービス時間分布をもつ単一サーバ待ち行列や、BMAP と位相型サービス時間分布をもつ複数サーバ待ち行列など、応用上重要なセミ・マルコフ型待ち行列は、準出生死滅過程(QBD: Quasi-Birth-and-Death process)や、M/G/1 型、GI/M/1 型、GI/G/1 型マルコフ連鎖などに帰着され、これらはいずれも、LDSMC の特別な場合である。

研究代表者とその共同研究者らは、こうした LDSMC、および、関連する待ち行列について、これまでに以下のような研究成果をあげてきた。

### (1) ブロック単調な LDSMC の切断誤差評価

無限状態マルコフ連鎖の定常分布を計算する際には、推移確率行列の切断近似がよく用いられる。

この近似法は、推移確率行列の北西角(左上隅)に位置する有限次元部分正方行列を切り出し、それが確率行列(以下、連続時間モデルの場合には、保存的な Q 行列と読み替える)になるように適当な方法で成分を増大させる手法である。

こうして得られる有限次元確率行列の定常分布は、元の定常分布に対する近似である。当然のことながら、その近似精度は、切断後の行列サイズと成分の増大法に依存し、一般に、理論的な評価は容易ではない。実際、ブロック単調な LDSMC については、

「最終列ブロック増大切断(北西角の最終列ブロックの成分を増大させる)」が最も良い近似を与えることが示されているが、その誤差の定量的な評価はなされていない(Li and Zhao, Stochastic Models, 2000)。

研究代表者は、ブロック単調な LDSMC が幾何的ドリフト条件を満たすという仮定のもとで、最終列ブロック増大切断によって得られる定常分布の陽的な誤差上界を導出した(Masuyama, Adv. Appl. Prob., 2015)。

### (2) M/G/1 型、GI/G/1 型マルコフ連鎖の漸近解析

先に述べたように、M/G/1 型および GI/G/1 型マルコフ連鎖は、LDSMC の特別な場合である。研究代表者とその共同研究者らは、これらのマルコフ連鎖について、定常分布の重負荷極限解析(Kimura et al., OR Letters, 2012)、軽裾的漸近解析(Kimura et al., Stochastic Models, 2010)、および劣指數的漸近解析(Masuyama, EJOR, 2011)などの研究を行い、既知の漸近公式をより緩い条件下で示したり、新たな漸近公式を導出したりすることに成功した。

### (3) 再試行型単一サーバ待ち行列に関する劣指數的漸近解析

本研究開始時点で、申請者は、BMAP と一般的なサービス時間分布をもつ再試行型単一サーバ待ち行列(以下、再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列とよぶ)の劣指數的漸近特性について、既に一定の成果を上げていた。

当該研究は、漸近的レベル独立性をもつ上方ブロック・ヘッセンベルグ・マルコフ連鎖(BHMC: Block Hessenberg Markov chain)の定常分布の劣指數的漸近解析に帰着される。しかし、これに関する先行研究はない。ちなみに、上方 BHMC は、レベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖とよばれることもある。

## 2. 研究の目的

LDSMC と関連する待ち行列モデルについて、これまでに報告されている理論的な結果はまだ十分とは言えない。実際、研究代表者が出席した再試行型待ち行列に関する国際ワークショップ(WRQ, 東工大, 2014年7月)においても、LDSMC に関する漸近公式や精度保証付き数値計算法を求める声が大きかった。こうした状況を踏まえ、以下に挙げる課題に取り組む。

### (1) 漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の劣指數的漸近解析

M/G/1 型マルコフ連鎖は、レベル独立的な推移構造をもつ上方 BHMC である。そのため、

M/G/1 型マルコフ連鎖は解析的に扱やすく、定常分布に関する漸近公式が多数示されている。

一方、レベル独立的ではない上方 BHMC の漸近解析結果はあまり知られていない。研究代表者が知る限り、再試行型 M/M/c 待ち行列、および、集団到着のない再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列などから作られるマルコフ連鎖に対して、いくつかの軽裾的漸近公式が報告されているのみである。

研究代表者は、適当な測度変換によって、再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列から構成される LDSMC が、漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC となることに気づいた。

この着想に基づき、再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列への応用を主たる目的として、漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の劣指數的漸近解析を行う。具体的には、その定常分布に関する「補分布関数の劣指數的漸近公式」および「確率関数の局所劣指數的漸近公式」などを導出する。

#### (2) 劣幾何的ドリフト条件下でのブロック単調な LDSMC の切断誤差評価

幾何的ドリフト条件をみたく LDSMC については、既に研究代表者が示した結果がある (Masuyama, Adv. Appl. Prob., 2015)。そこで、幾何的ドリフト条件と相補的な関係にある劣幾何的ドリフト条件が満たされる場合を考え、最終列ブロック増大切断によって得られる定常分布の誤差上界を求める。これが達成されれば、ブロック単調な LDSMC の切断誤差評価については一応の決着をみることになる。

#### (3) レベル依存準出生死滅過程(レベル依存 QBD)に対する一般化切断法の誤差評価

レベル依存 QBD の推移確率行列はブロック 3 重対角構造を有する。したがって、レベル依存 QBD の定常分布を求める際には、汎用的な近似法である最終列ブロック増大切断ではなく、ブロック 3 重対角構造を有効に活用する「一般化切断法 (Neuts and Rao, Queueing Systems, 1990)」がしばしば用いられる。

しかしながら、一般化切断法で得られる定常分布の誤差評価に関する先行研究はない。本研究では、推移確率行列の偏差行列を用いて一般化切断法の誤差評価式を導出し、レベル依存 QBD に対する精度保証付き数値計算法を構築する。

#### (4) 再試行と途中退去のある M/M/c 待ち行列に対する裾漸近特性を考慮した数値計算法の開発

再試行と途中退去のある M/M/c 待ち行列は、ポアソン到着と指数的なサービス・再試行・途中退去をもつ複数サーバ待ち行列である。当該待ち行列モデルは、代表的なレベル依存型待ち行列であり、コールセンタの混雑現象を抽象化した確率モデルである。

この待ち行列に対し、上記項目 (3) の研究成果と、(定常)系内容数分布に関する漸近公式を用いることで、精度保証と元の裾漸近特性 (補分布関数の漸近的な減衰速度) の再現を両立する数値計算法の開発を目指す。

### 3. 研究の方法

#### (1) 漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の劣指數的漸近解析

上方 BHMC の定常分布は、レベルごとに可算無限個存在する R 行列を用いて表現できる。以下、これを R 行列表現とよぶ。一般に、R 行列の具体的な値を求めるのは難しいため、定常分布の R 行列表現は形式的なものである。

しかし、上方 BHMC が、漸近的レベル独立性をもつ場合には、十分に上方のレベルでの R 行列は、適切に構成された 2 つの M/G/1 型マルコフ連鎖の R 行列によって「はさみうち」にすることができる。

この事実と、M/G/1 型マルコフ連鎖に対する研究代表者らの研究成果を組みわせることで、漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の定常分布に関する「補分布関数の劣指數的漸近公式」および「確率関数の局所劣指數的漸近公式」を導く。

#### (2) 劣幾何的ドリフト条件下でのブロック単調な LDSMC の切断誤差評価

ブロック単調な LDSMC が、劣幾何的ドリフト条件を満たすという仮定のもとで、最終列ブロック増大切断によって得られる定常分布の誤差上界を導出する。

一般に、マルコフ連鎖に対するドリフト条件は、推移確率行列を含む連立不等式として表現される。そして、ドリフト条件が成立するという事は、対応する連立不等式を満たす非負ベクトル (以下、非負解ベクトルとよぶ) が存在することと同値である。

ところで、最終列ブロック増大切断によって得られる定常分布の誤差上界は、この非負解ベクトルを用いて表現することができる。逆に言うと、非負解ベクトルが具体的に求まらなければ、数学的に示した誤差上界は「形式的な」ものになってしまう。応用の観点から言えば、ほとんど意味がない。したがって、ドリフト条件の非負解ベクトルを構成することは極めて重要である。

しかし、幾何的ドリフト条件に比して、

一般に、劣幾何的ドリフト条件の非負解ベクトルを求めるのは容易ではない。先行研究では、単調性(ブロック単調性より強い条件)を仮定した上で、個別の場合に特有の発見的方法によって非負解ベクトルを構成している。

一方、本研究では、凸関数の性質を利用した非負解ベクトルの新しい構成法を確立する。この構成法は、いくつかの付加的条件を必要とするものの、一般的な劣幾何的ドリフト条件に適用可能である。

### (3) レベル依存 QBD に対する一般化切断法の誤差評価

レベル依存 QBD に対して導入された一般化切断法は、切断レベルより上位レベルでの推移確率をレベル独立なものに修正する近似法である。一般化切断法が施されたレベル依存 QBD の定常分布については、効率のよい数値計算法が知られているが、誤差評価に関する先行研究はない。

しかし、一般化切断法で得られる定常分布の誤差は、「修正前後での推移確率行列の差」と「元のレベル依存 QBD に関する偏差行列」を用いて表現できる。ただ、偏差行列の具体的な値を求めるのは容易ではない。

そこで、偏差行列が、ある Poisson 方程式を満たすことを利用し、偏差行列のノルムを上から評価することで、一般化切断法が与える定常分布に対する誤差上界を導く。

### (4) 再試行と途中退去のある M/M/c 待ち行列に対する裾漸近特性を考慮した数値計算法の開発

当該待ち行列の系内容数過程はレベル依存 QBD となり、定常分布(系内容数分布)は一般化切断法によって数値計算可能である。また、その計算精度は上記項目(3)の研究成果によって評価することができる。

しかし、一般化切断法では、元の定常分布の裾漸近特性は再現されない。実際、一般化切断法が施されたレベル依存 QBD の定常分布は幾何的漸近特性をもつが、元の定常分布は必ずしも幾何的には減衰しない。

この問題を解決し、より精度の高い数値計算を実現するため、以下のようなアルゴリズムを構築する。

- (a) 元の定常分布の裾漸近特性に応じた測度変換を行い、変換後のレベル依存 QBD の定常分布が幾何的漸近特性をもつようにする。
- (b) 変換後のレベル依存 QBD に一般化切断法を適用し、定常分布を計算する。

- (c) 計算された定常分布に対し、(a)で行った測度変換の逆変換を施す。

## 4. 研究成果

### (1) 漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の劣指数的漸近解析

まず、再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列について解析を行った。再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列の系内容数分布は、適当な測度変換によって、漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の定常分布に帰着される。

研究代表者は、再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列の系内容数分布が、劣指数的漸近特性をもつという条件のもとで、再試行のない BMAP/GI/1 待ち行列の系内容数分布と、同じの裾漸近特性をもつことを示した(arXiv:1310.4608)。

しかし、再試行型 BMAP/GI/1 待ち行列から離れ、(一般的な)漸近的レベル独立性をもつ上方 BHMC の劣指数的漸近解析については、すぐには解決できない問題が一部残った。この問題の解決は、将来の研究課題としたい。

### (2) 劣幾何的ドリフト条件下でのブロック単調な LDSMC の切断誤差評価、および関連研究課題

当初の計画通り、ブロック単調性をもつ離散時間 LDSMC に対し、劣幾何的ドリフト条件下で、最終列ブロック増大切断による定常分布の計算可能な誤差上界を導出した。また、関連する課題として、M/G/1 型マルコフ連鎖の最終列ブロック増大切断の収束性に関する漸近解析を行った。

ついで、連続時間上で定義されたブロック単調な LDSMC が、幾何的ドリフト条件を満たすという仮定のもとで、最終列ブロック増大切断によって得られる定常分布の陽的な誤差上界を示した。

さらに、ブロック単調性を仮定しない一般的な連続時間 LDSMC を対象とし、その最終列ブロック増大切断の誤差評価を行った。先行研究では、「幾何的ドリフト条件」や「劣幾何的ドリフト条件」といった特定のドリフト条件が仮定されているが、本研究では、一般的なドリフト条件のもとで、計算可能な誤差上界を示すことに成功した。

くわえて、四分平面上の2次元反射型ランダムウォークに対する QBD 近似について、ある技術的な条件のもとで、定常分布の誤差上界を示した。

### (3) 正規化基礎行列による BHMC の数値計算

「2. 研究の目的」で述べたように、当初、下記2つの課題に取り組む予定であった。

レベル依存 QBD に対する一般化切断法の誤差評価

再試行と途中退去のある M/M/c 待ち行列に対する裾漸近特性を考慮した数値計算法の開発

しかし、前項(2)で述べた研究成果を得る過程で、一般化切断法は、最終列ブロック増大切断に対して、近似精度の点で、特段の優位性をもたないと判断するに至った。そこで、上記課題、および、その成果を前提とした課題に替えて、関連する課題「正規化基礎行列による BHMC の数値計算」に取り組むことにした。

正規化基礎行列とは、可算状態空間上のエルゴード的なマルコフ連鎖に対して定義されるものであり、研究代表者が導入した。

正規化基礎行列は確率行列であり、その各行には、元の推移確率行列に対する単一列増大切断(ブロック増大切断の特別な場合)の定常分布が現れる。この事実を利用して、正規化基礎行列の極限公式を示した。

さらに、得られた極限公式を用いて、下方 BHMC (レベル依存 QBD を含む)や、その特別な場合である GI/M/1 型マルコフ連鎖の定常分布に関する行列無限積解を導出し、その数値計算アルゴリズムを構築した (arXiv:1603.07787)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Hiroyuki Masuyama, "A sufficient condition for the subexponential asymptotics of GI/G/1-type Markov chains with queueing applications," *Annals of Operations Research*, vol. 247, no. 1, pp. 65-95, 2016. (査読有)  
doi: 10.1007/s10479-015-1893-6

Hiroyuki Masuyama, "Error bounds for augmented truncations of discrete-time block-monotone Markov chains under subgeometric drift conditions," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 37, no. 3, pp. 877-910, 2016. (査読有)  
doi: 10.1137/15M1024743

Hiroyuki Masuyama, "Continuous-time block-monotone Markov chains and their block-augmented truncations," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 514,

no. 1, pp. 105-150, 2017. (査読有)  
doi: 10.1016/j.laa.2016.10.014

Tatsuaki Kimura, Hiroyuki Masuyama, and Yutaka Takahashi, "Light-tailed asymptotics of GI/G/1-type Markov chains," *Journal of Industrial and Management Optimization*, vol. 13, no. 4, pp. 2093-2146, 2017. (査読有)  
doi: 10.3934/jimo.2017033

Hiroyuki Masuyama, "Error bounds for last-column-block-augmented truncations of block-structured Markov chains," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 60, no. 3, pp. 271-320, 2017. (査読有)  
doi: 10.15807/jorsj.60.271

[学会発表](計 15 件)

境谷 秀作, 増山 博之, 高橋 豊, "反射型マルコフ変調ランダムウォークに対するレベル増分切断の誤差評価," 2015 年度確率モデルシンポジウム (Symposium on Stochastic Models 2015), pp. 86-95, 多摩永山情報教育センター, 2016/01/21-23.

勝又 洋介, 増山 博之, 高橋 豊, "有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖の劣幾何的収束性," 2015 年度確率モデルシンポジウム (Symposium on Stochastic Models 2015), pp. 96-103, 多摩永山情報教育センター, 2016/01/21-23.

木村 達明, 増山 博之, 高橋 豊, "Heavy-traffic limits of the moments of the stationary distribution of the GI/G/1-type Markov chain," 2015 年度確率モデルシンポジウム (Symposium on Stochastic Models 2015), pp. 104-112, 多摩永山情報教育センター, 2016/01/21-23.

増山 博之, "ブロック構造化マルコフ連鎖の切断誤差評価と摂動解析," 日本オペレーションズ・リサーチ学会 不確実性環境下の意思決定モデリング研究部会, 常翔学園大阪センター, 2016/06/11.

Hiroyuki Masuyama, Yutaka Sakuma and Masahiro Kobayashi, "Simple error bounds for the QBD approximation of a special class of two dimensional reflecting random walks," *The 11th*

International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2016), Wellington, New Zealand, December 13-15, 2016.  
doi: 10.1145/3016032.3016048

Moeko Yajima, Tuan Phung-Duc and Hiroyuki Masuyama, "The stability condition of BMAP/M/ queues," The 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2016), Wellington, New Zealand, December 13-15, 2016.  
doi: 10.1145/3016032.3016046

勝又 洋介, 増山 博之, 高橋 豊, "Geometric convergence of finite-level M/G/1-type Markov chains," 2016 年度確率モデルシンポジウム (Symposium on Stochastic Models 2016), pp. 109-118, 東京理科大学 森戸記念館, 2017/01/19-21.

木村 達明, 増山 博之, 高橋 豊, "Revisiting the heavy-traffic asymptotics of the GI/G/1-type Markov chain: a complete proof of the asymptotic formula for the stationary distribution," 2016 年度確率モデルシンポジウム (Symposium on Stochastic Models 2016), pp. 143-148, 東京理科大学 森戸記念館, 2017/01/19-21.

Masahiro Kobayashi, Hiroyuki Masuyama, Yutaka Sakuma, Atsushi Inoie, "Error bound for the QBD approximation of a two dimensional reflecting random walk," The 21th Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS 2017), Quebec City Convention Centre, Quebec City, Canada, 2017/07/17-21.

Yoshiaki Inoue, Hiroyuki Masuyama, Takine Tetsuya, Toshiyuki Tanaka, "The stationary distribution of the age of information in FCFS single-server queues," The 2017 IEEE International Symposium on Information Theory, Aachen, Germany, June 25-30, 2017.  
doi: 10.1109/ISIT.2017.8006592

Tatsuaki Kimura, Yosuke Katsumata and Hiroyuki Masuyama, "Geometric convergence of finite-level

M/G/1-type Markov chains," The 12th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2017), Yanshan University, Qinhuangdao, China, 2017/08/21-23.

Moeko Yajima, Tuan Phung-Duc and Hiroyuki Masuyama, "The stability condition of BMAP/PH/ queues," The 12th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2017), Yanshan University, Qinhuangdao, China, 2017/08/21-23.

矢島 萌子, フンドック トゥアン, 増山 博之, "マルコフ型集団到着過程と相型サービス分布を持つ無限サーバ待ち行列の安定条件," 日本オペレーションズ・リサーチ学会 関西支部 若手研究発表会, 関西大学うめきたラボラトリ, 2017/10/28.

増山 博之, "マルコフ連鎖 安定性のトリニティをめぐって," 2017 年研究賞受賞記念講演, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年秋季研究発表会, 関西大学, 2017/09/14-15.

増山 博之, "一般的な状態空間をもつマルコフ連鎖の Poisson 方程式の解に対する計算可能な上界とその応用," 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会 (第 272 回), 東工大 (大岡山), 2017/12/16.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://infosys.sys.i.kyoto-u.ac.jp/masuyama/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

増山 博之 (MASUYAMA, Hiroyuki)

京都大学・大学院情報学研究科・准教授  
研究者番号: 60378833