

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月28日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K00064

研究課題名(和文) 統計的推論の情報幾何の新しい展開

研究課題名(英文) New Development on Information Geometry of Statistical Inference

研究代表者

逸見 昌之 (Henmi, Masayuki)

統計数理研究所・数理・推論研究系・准教授

研究者番号：80465921

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた研究成果は以下の通りである。統計モデルのパラメータ推定に用いられる推定関数がパラメータに関して積分不可能なとき、それから誘導される2つの双対接続のうち、一方は捩れがないがもう一方は捩れが生じ得る。特にその捩れがない接続に関してのみ統計モデルが平坦な場合に、情報幾何学で論じられている双対平坦空間での射影定理と同様な定理が成り立つことを示した。また、推定関数からは、双対接続を伴うリーマン多様体の構造だけでなく、シンプレクティック多様体の構造も自然に誘導されることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

情報幾何学においては、統計モデルの微分幾何学的な構造として、捩れのない2つの双対接続を伴う統計多様体と呼ばれる構造がこれまで主に議論されてきたが、パラメータに関して積分不可能な推定関数からは(片方が)捩れを持つ2つの双対接続が自然に誘導され、この幾何構造に関する幾何学および統計学的な性質を探求することは、情報幾何学の発展に大きく寄与するものと考えられる。また、推定関数からシンプレクティック構造が誘導されるということも新たな知見であり、この構造の性質を幾何学と統計学の両面から考察することも、情報幾何学の今後の進展につながるものである。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have got the following results. when an estimating function for parameter estimation in a statistical model is not integrable with respect to the parameter, two dual connections are induced from the estimating function and one of them is torsion-free whereas the other possibly has torsion. We have shown that a projection theorem similar to that in a dually flat space holds in the case where the statistical model is flat with respect to the torsion-free connection. In addition, we have also shown that a symplectic manifold is naturally induced from an estimating function as well as a Riemannian manifold with dual connections.

研究分野：統計科学

キーワード：推定関数 プレコントラスト関数 捩れを許す統計多様体 変形指数型分布族 一般化最尤推定法

1. 研究開始当初の背景

統計的推論の微分幾何として始まった情報幾何学は、これまで、情報理論・最適化・機械学習・量子推定といった関連諸分野にも影響を及ぼしながら発展を続け、特に日本人研究者の貢献が大きい分野であるが、近年では海外でも関心が高まりつつある。例えば 2013 年にフランスで行われた幾何学と情報科学に関する国際会議 Geometric Science of Information (GSI2013) では、情報幾何学は中心的なテーマとして扱われ、また国内でもここ数年、若手を中心とした研究集会が毎年行われている。このような流れの中で、本研究の代表者は最近、微分幾何学、特に情報幾何の数学的な側面について研究を行っている研究者と共同研究を行い、統計学の情報幾何的側面に関するいくつかの成果を得た。その一つは、推定関数から誘導される双対微分幾何的構造である。双対微分幾何構造とは、統計モデル(確率密度関数の集合)を多様体と見なしたときに、その上で与えられる Riemann 計量とそれに関して双対な 2 つのアフィン接続のことであるが、通常の情報幾何学においては、2 つの確率密度関数の隔たり度を測る Kullback-Leibler ダイバージェンスから Fisher 計量と指数接続、混合接続が双対微分幾何構造として誘導され、統計学で最も基本的な最尤推定法の幾何学的な描像が与えられる。これは、スコア関数という特別な推定関数から誘導される幾何構造と同一のものであり、このことから、一般の推定関数から誘導される幾何構造についても、その推定関数に基づくパラメータ推定法に対して、ある種の同様な幾何学的描像を与えることが予想されるが、まだよく分かっていない。また、特に推定関数がパラメータに関して積分可能でない場合は、誘導される幾何構造において、双対な 2 つのアフィン接続の一方に捩れが生じるという、これまで扱われてきた(古典的な)統計モデルの微分幾何構造にはないことが起こる。一方、もう一つの成果として、変形指数型分布族の双対微分幾何構造がある。変形指数型分布族とは、ある種の一般化されたエントロピーの(あるモーメント制約下での)最大化によって得られる確率分布族のことであるが、この多様体上には、自然な形で 2 つの異なる双対微分幾何構造が導入される。一つは、U-ダイバージェンスと呼ばれるものから誘導される幾何構造と同一のもので、特にその特別な場合(-ダイバージェンスの場合)は、最尤推定法をロバスト化した推定法(外れ値の影響を受けにくい推定法)の幾何学を与える。もう一つの方は、ある種の一般化された独立性の下での疑似的な最尤推定法の幾何学を与えるものと考えられているが、そのはっきりとした統計的意味はまだよく分かっていない。そこで、まずはこれらの説明を中心として、さらには関連する未解決の課題にも取り組みながら、情報幾何学の統計科学における役割を促進させたいと考えたのが、本研究を提案するに至った背景である。

2. 研究の目的

確率密度関数の集合を多様体と見なし、その上で統計的推論の(微分)幾何学的な構造を論じることから始まった情報幾何学は、これまで情報理論・最適化・機械学習などの関連諸分野にも影響を及ぼしながら発展してきたが、統計学では伝統的な高次漸近理論における成果以来、あまり大きな進展は得られていない。しかしながら本研究の代表者のこれまでの共同研究から、変形指数型分布族の情報幾何や非可積分推定関数の情報幾何など、情報幾何を通じた他分野との交流によって新たな可能性が生まれている。これらはまだ幾何学的な議論が先行しているが、本研究ではこれらの統計的意味や役割を明らかにしつつ、他の未解決課題も含めながら、情報幾何学の統計科学における役割をさらに促進させることを目的とする。

3. 研究の方法

本研究はその性格から理論的な研究が中心となるが、情報幾何学の学際性から、関連する研究者とのディスカッションを行いつつ、研究を進めていく。まず、本研究を提案する動機となる共同研究を行ってきた名古屋工業大学の松添博氏(名古屋工業大学)とは、今後も議論を続けていき、本研究で対象としている問題の幾何学的な側面についての助言を仰ぐ。また、英国 St Andrews 大学の Peter Jupp 教授は、長年、情報幾何学の理論的な側面について研究を行ってきた統計学者であるが、微分幾何学と統計学の双方に対して造詣が深く、本研究の特に推定関数の問題について議論を行う。変形指数型分布族に関する問題は、統計物理学とも関連が深いので、その方面の研究者とも議論を行い、また、その他の未解決問題についても、数学・統計学双方の研究者と議論する。研究成果は順次、論文としてまとめ学術誌に公表し、また、関連する国内外の研究集会などでも積極的に発表を行う。

4. 研究成果

(1) 半平坦空間における射影定理

情報幾何学においては、確率密度関数の集合としての統計モデルの微分幾何学的な構造を数学的に抽象化した、「統計多様体」と呼ばれる幾何構造、すなわち、(可微分)多様体上に与えられた Riemann 計量とそれに関する 2 つの捩れない双対なアフィン接続(双対接続)が主要な役割を果たすが、一般に、多様体上に「コントラスト関数」と呼ばれる 2 点間の隔たりを測る非対称な 2 点関数が与えられると、そこから統計多様体の構造が誘導されることが知られている。例えば、統計モデルにおける Kullback-Leibler ダイバージェンスはコントラスト関数の典型例であり、そこからは Fisher 計量と指数接続、混合接続が誘導

される。統計多様体の中で、特に応用上(理論上も)重要なのは、2つの双対接続に関して多様体が平坦になっている場合(双対接続に関する曲率と捩率がともに消えている場合)であり、このとき、統計多様体は「双対平坦空間」と呼ばれる。双対平坦空間においては、標準的なコントラスト関数(標準的なダイバージェンス)が定義され、2つの双対接続に関する2つの測地線が直交する際に、この標準的コントラスト関数に関する「ピタゴラスの定理」が成り立ち、また、双対平坦空間の1点から部分多様体上の点までの標準的コントラスト関数が最小値を取るときに、その1点と最小値を与える点を結んだ測地線(2つの測地線のうちの一方)が部分多様体に直交するという「射影定理」が成り立つ。統計学の文脈では、最も基本的な確率分布族である指数型分布族が双対平坦空間(指数接続と混合接続に関する双対平坦空間)の典型例であり、標準的コントラスト関数はKullback-Leiblerダイバージェンスに一致し、射影定理によって、指数型分布族の部分多様体に当たる曲指数型分布族における最尤推定量が、混合接続に関する測地線による直交射影として与えられることが言える。一方、多様体上に、プレコントラスト関数(コントラスト関数の微分を抽象・一般化した概念)と呼ばれる、点と接ベクトルの関数が与えられると、Riemann計量とそれに関する2つの双対なアフライン接続が誘導されるが、一方の接続は常に捩れがない(捩率がゼロである)ものの、もう一方の接続には捩れが生じ得る。この幾何構造は一般に「捩れを許す統計多様体」と呼ばれ、量子統計モデル(量子状態を表す密度行列の集合)ではこのような構造が自然に現れることが以前から知られていたが、通常の統計モデル(確率密度関数の集合)においても、パラメータ推定に用いる推定関数から自然にプレコントラスト関数が定義され、そこから捩れを許す統計多様体の構造が誘導される。特に、その推定関数がパラメータに関して積分不可能な場合には、双対接続の一方に捩れが生じ得る。実際に捩れが生じる場合には、双対接続の両方に関して平坦になる(つまり双対平坦になる)ことはあり得ないが、捩れのない一方の接続に関してのみ平坦となることは可能であり、このとき、統計モデルは「半平坦空間」とであると言う。(但し、この用語は本研究の代表者が発案したもので、必ずしも一般に受け入れられているというわけではない。)

半平坦空間は、一般の捩れを許す統計多様体に対して考えられる概念であるが、この空間においては、もとの捩れを許す統計多様体の構造を誘導する標準的なプレコントラスト関数を定義することができ、双対平坦空間のようなピタゴラスの定理は成り立たないものの、類似の「射影定理」は成立する。すなわち、「半平坦空間の1点から部分多様体への測地線(捩れのない接続に関する測地線)がその部分多様体に直交するのは、その1点と測地線の部分多様体上での端点における(任意の)接ベクトルのプレコントラスト関数がゼロの値を取るときに限る。」本研究では、まずこの事実を明らかにした。本研究ではさらに、この性質と推定関数によるパラメータ推定との関係、例えば、この射影定理によって、推定関数から作られる推定方程式の解としての推定量が、測地線の直交射影として与えられるかを明らかにしようとしていたが、まだ不明な部分が多く、今後も続けて研究を行っていく予定である。

(2) 推定関数から誘導されるシンプレクティック構造

多様体上に与えられたコントラスト関数からは、統計多様体の構造だけでなく、直積多様体(もとの多様体2つの直積)に対してシンプレクティック多様体の構造も誘導されることが以前から知られていたが、このシンプレクティック構造は、プレコントラスト関数からも誘導されることが、本研究により判明した。この幾何構造が、コントラスト関数から誘導されるものとどう違ってくるのか、統計モデルの推定関数から誘導される場合に、どのような統計的意味・役割があるのかなどはまだ分かっていないが、これらもまた今後の課題として、引き続き研究を行っていく予定である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計2件)

Masayuki Henmi and Hiroshi Matsuzoe (2019). Statistical Manifolds Admitting Torsion and Partially Flat Spaces. Geometric Structures of Information, 37-50 (査読有). https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-02520-5_3

Masayuki Henmi (2017). Statistical Manifolds Admitting Torsion, Pre-contrast Functions and Estimating Functions. Lecture Note in Computer Science 10589, 153-161 (査読有). https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-68445-1_18

[学会発表](計5件)

発表者名: Masayuki Henmi

発表標題: Information Geometry of Estimating Functions (poster presentation)

学会等名: 5th Joint Statistical Meeting of the Deutsche Arbeitsgemeinschaft Statistik (DAGStat2019)

発表年: 2019年

発表者名 : Masayuki Henmi
発表標題 : Generalized Maximum Likelihood Estimation and Deformed Exponential Families
(poster presentation)
学会等名 : 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics
発表年 : 2018 年

発表者名 : Masayuki Henmi
発表標題 : Statistical Manifolds Admitting Torsion, Pre-contrast Functions and
Estimating Functions
学会等名 : Third International Conference on Geometric Science of Information (GSI2017)
発表年 : 2017 年

発表者名 : Masayuki Henmi
発表標題 : Statistics of the generalized maximum likelihood estimation in deformed
exponential families (invited talk)
学会等名 : International Conference on Statistical Physics (SigmaPhy2017)
発表年 : 2017 年

発表者名 : 逸見昌之
発表標題 : 重み付き推定方程式と二重ロバスト推定法
学会等名 : 2016 年度統計関連学会連合大会 (招待講演)
発表年 : 2016 年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名 :

ローマ字氏名 :

所属研究機関名 :

部局名 :

職名 :

研究者番号 (8 桁):

(2)研究協力者

研究協力者氏名：松添 博

ローマ字氏名：(Matsuzoe Hiroshi)

研究協力者氏名：Peter Jupp

ローマ字氏名：(Peter Jupp)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。