

令和元年6月18日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K00911

研究課題名(和文)空間の想像力育成のための「対象/視点」に着目した中学校図形教材の開発

研究課題名(英文) A Study on Developing Educational Materials for secondary school students based on Clarifying Viewpoints and Objects of the Observation in Learning Space Figures.

研究代表者

太田 伸也(OHTA, Shinya)

東京学芸大学・教育学部・教授

研究者番号：50322920

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、空間の想像力を育てることを目標とする中学校図形指導のための教材を開発することである。そのために、「何をどこから観るか(「対象/視点」と表記する)」に関する枠組みを提示し、指導事例の検討を通してその役割を検討した。見出した成果は以下の通りである。(1)「対象/視点」の変容が問題解決に都合のよい変換を見出すことに対応する。(2)教師の授業計画において「対象/視点」の意識化は空間の想像力育成を目標に位置づける役割をもつ。(3)実際の授業においては、計画した「対象/視点」の変容を生徒の活動に顕在化できたかを評価する役割を果たす。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、論証指導に重点が置かれている中学校図形指導に対して、空間の想像力を育てることを目標の1つの柱として位置付け、数学教育が担う役割を明らかにしようとするものである。「対象/視点(何をどこから観るか)」の枠組みは、空間図形を対象とする問題解決の活動における視点の役割に着目し、対象と関連づけてその変容を考えるものである。空間図形指導における「対象/視点」の意識化、及び生徒の活動における「対象/視点」の顕在化は、空間の想像力を育てるための教材開発や指導の改善に重要な役割を果たすと考えられる。

研究成果の概要(英文)：The aim of the study is to develop educational materials of space and shapes for secondary school students. While solving problems of space figures, students would examine the objects in space through mathematical activities to observe, manipulate and experiment. In the process of these activities, students would find or change the viewpoints and objects of the observation. It is essential for learning space figures. Clarifying viewpoints and objects of the observation leads to the idea of transformation. So the framework of viewpoints and objects of the observation is important. One of the goals of learning space figures may be developing the abilities of finding or changing viewpoints and objects of the observation.

研究分野：科学教育

キーワード：空間の想像力 対象と視点 空間図形指導 数学教育

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究では、中学校における空間図形指導の目標を、空間図形についての知識や技能の獲得ではなく、空間図形の見方や考え方の育成と捉える。空間の想像力はその重要な柱であり、島田(1990)は「空間の想像力」として教育的な立場から次の3つの事柄を挙げている。経験的な世界に、抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること。頭の中で図形を考え、それに幾何学的操作を施した結果を、模型や図を用いずに想像できること。空間で、いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること。これらの事柄は、実用的、文化的目的から、また陶冶的目的からも重視され、すべての子どもが身に付けるべきものであるが、これまでの中学校数学の指導では数学的内容を中心に組み立てられているため背景にはあっても意識されていない場合が多い。特に第二学年以降は図形の学習が論証指導の場となり空間図形を考察の対象とすることはほとんどないことから、これらの事柄を目標とする指導は少ない。一方で、このような「空間の想像力」が育てられていないことによる問題点が中等教育や高等教育の他分野の学習や社会生活で指摘されることも多い。

(2) 本研究に至るまでに、「三角錐の頂点から底面への垂線の足を求める」、「太陽の動きを捉えるための数学的モデルを作る」等の「空間図形のモデルをつくる活動」を取り入れる教材の開発と、その実践における生徒の活動の把握や分析に取り組んできた。また、「空間図形に幾何学的操作を施して考える活動」について、空間図形のどの部分を、どのように、あるいはどの方向から観るかという視点の選択や決定が重要な役割をもつことが示唆された(太田,2012)。空間図形を観る視点にかかわる研究としては、空間思考についての総合的研究(狭間ら,2005)のほか、投影、切断などの見方を育てようとする実践的研究等があるが、生徒の活動を、空間図形を観る視点から把握し分析する枠組みはみられない。そこで、本研究では、新たに「何をどこから観るか(対象/視点)」に関する枠組みを提示し、事例の検討を通してこの枠組みの有効性を示すとともに、それを空間の想像力を育てることを目標とする教材開発に活かそうとしている。(太田,2013) なお、この点に関しては、Hershkowitzら(1996)が空間図形教育を概観し論じる中で、visual educationの必要性を強調し、対象と自分との関係(What I see)やこれらの関係を数学化する過程(How I see)に関する研究にも光をあてている。投影図、見取図の読みや解釈など視点の決定や選択を趣旨とする教材も示されているが、これを活かすには「対象/視点」を意識化するための分析が必要である。

(3) 上記に係る引用・参考文献

狭間節子(研究代表者)(2005)。「数学教育における空間思考の育成の視座からの図形・空間のカリキュラム開発研究」。平成15・16年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))研究成果報告書。
Hershkowitz,R, Parzysz,B, and van Dormolen,J.(1996). Space and Shape. International Handbook of Mathematics Education, Bishop,A.J. et al.(eds.), Kluwer Academic Publishers.161-204.
太田伸也(2012)。空間図形の問題を解決する活動についての一考察。日本数学教育学会 第45回数学教育論文発表会論文集.599-604
太田伸也(2013)。空間図形を観る視点について。日本数学教育学会数学教育学論究 95 臨時増刊 第46回秋期研究大会特集号. 33-40.
島田茂(1990)。「空間の想像力」。「教師のための問題集」。共立出版. 94-101.
上野直樹(1985)。「視点のしくみ」。宮崎清孝・上野直樹『コレクション認知科学 3 視点』。東京大学出版会.1-99

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、空間の想像力を育てることを目標とする中学校図形指導のための教材を開発することである。これは、中学校数学の教育課程では第二学年以降でほとんど空間図形が取り上げられていない現状に対して、空間図形の扱いを位置付ける価値を示し、その具体化を図ろうとするものである。具体的には次の2つの課題に取り組む。

空間図形に関する生徒の問題解決活動を把握し分析するために、新たに「何をどこから観るか(対象/視点)」に関する枠組みを提示し、事例の検討を通してこの枠組みの有効性を示す。

空間図形を観る「対象/視点」に関する枠組みをもとに、空間の想像力を育てることを目標とする中学校図形指導のための教材を開発するとともにその扱いを提案する。

(2) 上記 については、第一に、空間図形を観る「対象/視点」に関する枠組みを数学教育学と認知科学の両側面から再検討し価値を明確にすること、第二に、これまでの授業記録や新たな実践から生徒の活動をこの枠組みで分析することを通してその課題と有効性を示すことが目標である。また、 については、 で提示する空間図形を観る「対象/視点」に関する枠組みが、空間の想像力を育てる教材や実際の指導につながることを示す事例を提供することが目標である。

3. 研究の方法

(1) 本研究の目的達成のために、「空間図形を観る「対象/視点」の枠組みについての研究」

と、「 枠組みの有効性を示すための実践的な研究」に取り組んだ。なお、本研究は、平成 27 年度から 29 年度までの 3 年間の計画であったが、報告書をまとめる作業の段階で、「対象／視点」の枠組みの再検討等につき想定以上に時間がかかり、また研究代表者の大学での任務との関係もあり、延長申請をして「 対象／視点」の枠組みの再検討」に 4 年次に取り組んだ。

「対象／視点」の枠組みと教材との関わりを分析する。例えば、天文現象を教材とする授業を想定し、空間図形の問題を平面図形に置き換える変換を「対象／視点」の枠組みで分析すること等がその一例である。また、特に、理科教育で研究されている「視点移動能力」との関わりについて検討する。

空間図形を観る「対象／視点」と授業における生徒の活動との関わりを分析する。例えば、模型等を観察し考える生徒の活動を「対象／視点」の枠組みで分析することがその一例である。

上記の を総合し、「対象／視点」の枠組みについて再検討する。

(2) 本研究に取り組む時点での「対象／視点」の枠組み(太田, 2013)は次の通りである。空間図形を観る活動を分析し把握することを想定し、対象を観る観察者の位置を視点ととらえるとき、観る対象と そのときの視点について、それぞれ次の場合が考えられる。

対象について

- ・実世界の事物や模型など実際の空間図形(視覚で観ている場合)・・・「F」
- ・見取図、投影図や展開図などの空間図形の 2 次元表示(視覚で観ている場合)・・・「F₂」
- ・頭の中で想像している図形(視覚には頼らない場合)・・・「F_i」

視点について

- ・視覚における実際の視点(目の位置)・・・「V」
- ・頭の中で想像している視点(第二の自分の視点であり視点も対象化されている)・・・「V_i」

上記 , をもとに、何をどこから観るかを表 1 のように F/V (対象／視点) で表す。

表 1 「対象／視点」による枠組み

対象 \ 視点	視覚の視点 V	想像の視点 V _i
実際の空間図形 F	F/V	F/V _i
2 次元表示 F ₂	F ₂ /V	F ₂ /V _i
想像の図形 F _i	F _i /V	F _i /V _i

表 1 の「対象／視点」は、空間図形に関する問題解決のプロセスにおいて、何をどこから観ているかという、いわば空間図形に関する観察や議論の前提である。これを捉えることで、視点の決定や変更をどのように行なっているかを明らかにすることができる。「対象／視点」の同定の方法は事例を通して具体的に検討する必要があるが、対象が「F」、「F₂」で視点「V」である場合は問題解決者(生徒)の活動の観察からその把握が比較的容易であっても、対象「F_i」と視点「V_i」が想定される場合はそれが発話や記述等に表現されていないと把握が難しいことが考えられる。ここで、視点の決定や変更ということの意味について検討する。視点の決定や変更を表 1 に対応させると、文字通り V, V_i の決定や変更を意味する。しかし、何をどこから観るかが問題であり、このことは観る対象 F, F₂, F_i の決定や変更にも依存する。対象と視点の両方が変わる場合だけでなく、一方が変わる場合も重要な意味をもつ。従って、視点だけの決定や変更として論ずるのではなく「対象／視点」の組で考えること、すなわち、対象に対する観察者の位置だけでなく、どの対象の何を観るかも合わせて考えることが必要である。

4. 研究成果

(1) 理科教育における「視点移動能力」の議論を参照し、数学教育が担うべき課題について検討した。また、これとあわせて、天文現象を題材とする問題を開発し、「対象／視点」の枠組みで教材を検討すると共に、授業における生徒の活動を考察した。授業で提示した問題は次の 3 通りである。

問題 1

「シドニー(南半球)では、太陽は西から昇り東に沈む」というのは正しいか(本当か)?

問題 2

『シドニーでは、太陽の動きは□から昇り□を□通って□に沈む。この動きは「時計回り/反時計回り」である。』(□に入る言葉(方位)を考え、その理由を説明)

問題 3

「札幌と那覇で北極星を観ると、どちらの方が高く見えるか」

概括すれば、いずれも、「F_i/V_i(地球の外に視点をおいて太陽(北極星)を見る自分を想像すること)」が必要であり、それを頭の中で行うことが難しいから「F/V(地球儀等を用いて可視化する)」活動を想定している。このような活動の過程での「対象／視点」を検討し、また把握することを想定して授業とその考察を行ってきた。それぞれの授業計画と、生徒の活動の考察については、口頭発表論文及び研究成果報告書(平成 31 年 3 月)に掲載した。

(2)立体模型の観察を取り入れた教材の扱いと授業を考察した。授業で提示した問題は次の問題である。

問題

「立方体の対角線の長さが表れるように作図すると、正六角形に見えるのだろうか」(立方体が六角形に見えるとき、立方体の対角線の実長が表われるか)

また、これに対して、次の問題から出発し、透視図の見方も取り入れて視点を意識化する授業が提案された。

問題「立方体はどのように見えるか」

上記2つの問題の扱いについては、研究成果報告書(平成31年3月)に掲載した。

(3)上記の(1),(2)の教材研究と授業における生徒の活動の観察を元に、「対象/視点」の枠組みを再検討した。その結果、表2のように整理した。

表2 「対象/視点」による枠組みの改訂

対象 \ 視点	視覚の視点 V	想像の視点 Vi
実際の空間図形 F	F/V	
2次元表示 F ₂	F ₂	
想像の図形 Fi		Fi/Vi

具体的には、「F₂/V」、「F₂/V」、「F/Vi」、「F₂/Vi」という表記をやめ、「F/V」、「Fi/Vi」、そして「F₂」を用いた表記に改めることである。具体的には以下の通りである。

「F/Vi」について

例えば「目前にある空間図形について、その図形を後ろから見ようとする」(F/Vi)は、模型等を観察しつつ(F/V)視点を移動した場合を想像して見え方を想像する(Fi/Vi)場合である。従って、「F/V Fi/Vi」と「対象/視点」の変更として表す。

「F₂/Vi」について

例えば「目前にある立体の展開図について、裏側から観て考えようとする」(F₂/Vi)は、立体の2次元表示を観ている状態で(F₂)その空間図形をいろいろな視点から観たらどうなるかを想像する(Fi/Vi)場合である。従って、「F₂ Fi/Vi」と「対象/視点」の変更として表現する。例えば、投影図からその立体の正面図を想像する。場合は「F₂ Fi/Vi F₂」と「対象/視点」の変更として表す。

「Fi/V」について

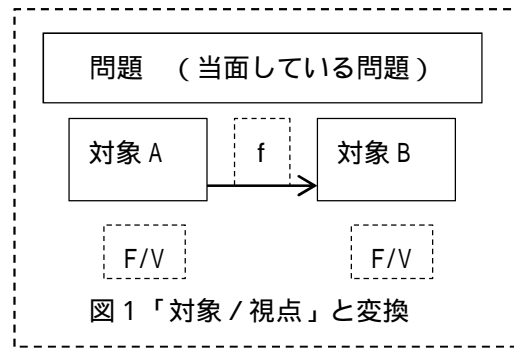
例えば「2本の竹ひご(直線)で決まる平面のように、視覚に頼って新たな図形を観ようとする」(Fi/V)は、具体物に対する視覚(F/V)を頼りに空間図形を想像する(Fi/Vi)ことである。従って、「F/V Fi/Vi」と「対象/視点」の変更として表す。

なお、これまで展開図や投影図など空間図形の2次元表示「F₂」を対象とする場合について、対応する視点を表してきた(F₂/V)が、この場合の視点Vは2次元表示に対応する空間図形をどこから観ているかを想像していること(Fi/Vi)を表すものであるから、「F₂ Fi/Vi」と「対象/視点」の変更として表すことになる。空間図形の2次元表示そのものを対象とするときの視点Vは決まっているという解釈である。

また、第2の修正点は、FおよびVを具体的に記述するときに、背景にある変換をできる限り明記することを考える。

(4)空間図形の問題解決場面では「対象/視点」の顕在化が必要であること、また、「空間の想像力」とは適切な「対象/視点」の選択と変更ができることであり目的に合った変換を見いだす過程であることを明らかにしようとしてきた。このことは、授業を計画する場合と、授業での生徒の活動を把握する場合とに分けて考察することが必要であることを意味する。計画においては想定される「対象/視点」とその変容を教師が意識しその顕在化をデザインすることが求められる。そして実際の授業でそれが実現されたかを把握するためには、把握できる仕掛けをつくる必要がある。実際、これまでの実験授業でも授業記録やワークシート等から生徒の「対象/視点」を推測することはできても、それを把握するためには生徒の発話等に「何を観ているか」「どこに視点を置いているか」が顕在化した場合である。そして、顕在化されないことが、教師と生徒、生徒どうしの協働的な問題解決をしにくくしている実態も把握された。以上のことから、授業計画における「対象/視点」の明確化(教師が意識化すること)と、生徒の活動の把握における「対象/視点」の顕在化に分けて考察を進める。言い換えると、「対象/視点」の枠組みは、教師の授業計画においてその変容を意識化する(すなわち空間の想像力育成を目標に位置づける)役割を果たし、実際の授業では計画した「対象/視点」とその変容を生徒の活動として顕在化できたかを評価する役割を果たすと言える。以上より、授業計画における「対象/視点」の明確化と、子どもの活動における「対象/視点」の顕在化とを分けて論

じることとし、表記についても図1を考えることにする。



(5) 空間の問題解決を取り入れる授業計画について、～ を示唆としてまとめておく。

授業計画における「対象/視点」の明確化

考えさせる問題の解決過程で中心的な役割を果たす変換に対応する「対象/視点」と、問題提示の方法を選択する際の「対象/視点」を検討しておく必要がある。

生徒の活動における「対象/視点」の顕在化

授業中の生徒の活動の把握において、～ に基づき子どもの思考における「対象/視点」を把握するとともに、必要に応じて協働の場面における「対象/視点」の共有のための手立てを講じることが必要である。

問題提示等の方法を「対象/視点」を意識して選択すること

例えば、次のような場合が考えられよう。

・事象や立体を見せずに言葉で提示する場合 (Fi/Vi)

たとえば「正四面体を、1つの頂点に集まる3辺の中点を通る平面で切断する。これを4つの頂点のすべてについて行くと、内部に残る立体は何か」と言葉だけで問う。

・現実世界の事象や立体模型を見せて提示する (F/V)

たとえば上記の問題を、正四面体の模型を見せながら示す。切るところや切りとった模型を見せる。

・視覚化を図る (Fi/Vi F/V)

たとえば、Fi/Vi で提示された問題を考えるために、立体模型をつくる。

なお、このとき、次の(ア)、(イ)について考える必要がある。

(ア)問題とその解決について、中心的な役割を果たすと思われる変換を明らかにする。これが複数ある場合も考えられる。

(イ)(ア)の解決過程における「対象/視点」の変容を考える。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

(1) 松原敏治, 樺沢公一, 太田伸也 (2018). 空間図形の問題解決における視線の顕在化の役割 - 立方体の模型を観察する授業での生徒と教師のやりとりから - . 日本数学教育学会第51回秋期研究大会発表集録, 査読無. 405-408.

(2) 松原敏治, 川村栄之, 太田伸也 (2017). 空間における位置関係のとらえ方(3) - 数学教育の立場からの天球図に関する考察 - . 日本数学教育学会第50回秋期大会発表集録, 査読無. 277-280.

(3) 川村栄之, 太田伸也, 松原敏治 (2017). 空間図形の問題解決における位置関係のとらえ方について 平面図形に置き換えて考える場面に焦点を当てて . 日本数学教育学会第50回秋期大会発表集録, 査読無. 243-246.

(4) 太田伸也, 樺沢公一, 松原敏治 (2017). 空間図形の問題解決における「対象/視点」の顕在化 - 立方体の模型を観察する授業での生徒の活動から - . 日本数学教育学会第50回秋期大会発表集録, 査読無. 227-230.

(5) 松原敏治, 川村栄之, 太田伸也 (2016). 空間における位置関係のとらえ方(2) - 模型の利用による視点の共有に着目して - . 日本数学教育学会第49回秋期大会発表集録, 査読無. 261-264.

(6) 太田伸也, 松原敏治, 川村栄之 (2016). 空間図形の問題解決場面における「対象/視点」の実際 - 太陽の動きを題材とする授業での生徒の活動から - . 日本数学教育学会第49回秋期大会発表集録, 査読無. 225-228.

(7) 松原敏治, 川村栄之, 太田伸也 (2015). 空間における位置関係のとらえ方 - 南半球から見た太陽の動きを題材として - . 日本数学教育学会第48回秋期大会発表集録, 査読無. 257-260.

(8) 太田伸也, 松原敏治 (2015). 空間を観る「対象/視点」の枠組みで「視点移動能力」を考える - 理科教育研究における「視点移動能力」に着目して - . 日本数学教育学会第48回秋期大会発表集録, 査読無. 225-228.

〔その他〕

研究成果報告書（101 ページ）：東京学芸大学附属図書館リポジトリにて公開申請中(2019.5)

『空間の想像力育成のための「対象／視点」に着目した図形教材の開発』

平成 27 年度～平成 30 年度 科学研究費助成事業 基盤研究(C)(一般)空間の想像力育成のための「対象／視点」に着目した中学校図形教材の開発 課題番号 15K00911，平成 31 年（2019 年）3 月，（研究代表者：太田伸也（東京学芸大学 数学科教育学分野），研究協力者：松原敏治（北陸学院大学短期大学部），樺沢公一（東京学芸大学附属小金井中学校），川村栄之（東京学芸大学附属小金井中学校），柴田翔（東京学芸大学附属小金井中学校），上村健斗（埼玉県立久喜北陽高等学校）

6．研究組織

(1)研究協力者

研究協力者氏名：松原 敏治

ローマ字氏名：(MATUBARA, Toshiji)

研究協力者氏名：樺沢 公一

ローマ字氏名：(KABASAWA, Koichi)

研究協力者氏名：川村 栄之

ローマ字氏名：(KAWAMURA, Hideyuki)

研究協力者氏名：柴田 翔

ローマ字氏名：(SHIBATA, Sho)

研究協力者氏名：上村 健斗

ローマ字氏名：(KAMIMURA, Kento)