

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：32661

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K01037

研究課題名(和文) カレッジ級数学学習者を理解から定着へと導くための動的・静的幾何連携システムの開発

研究課題名(英文) Development of the collaboration system between dynamic and static graphics to convert learners' understanding into static knowledge

研究代表者

金子 真隆 (KANEKO, Masataka)

東邦大学・薬学部・教授

研究者番号：90311000

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、動的幾何システム Cinderella によるインタラクティブな描画の出力を TeX における静的な描画を行なうためのコードに変換できるシステムとして KeTCindy を開発し、これら 2 種類の描画の連携が持つ教育効果について検証を行った。主に高専・大学初年級の解析学を中心としてテーマを設定し、関連する図的提示や授業設計を用意して、学習者の解答行動や解答結果(ワークシート)の分析を試みた。結果として、数学的モデルの背後にあるメカニズムに対する理解の深化を、タスク解答行動の組織(カプセル)化や解答経過の簡素化によって逆に追跡できる可能性を見出すことができた。

研究成果の概要(英文)：In this research, the system named KeTCindy which converts the graphical output of the dynamic geometry software Cinderella into TeX graphical code is developed. KeTCindy enables learners to synchronize the interactive operation on mathematical models and mathematical reasoning via its static counterpart. As research ingredients, calculus classrooms and associated teaching materials were carefully designed. The educational effect of this collaborative system has been researched through the ethnomethodological studies on the behaviors and worksheets of learners. To visualize the transition of learners behaviors, Sportscode system was used. As a result, it has been indicated that the qualitative change in learners' understanding of the mechanism behind mathematical models can be detected through the encapsulation of their behavior and the simplification of their solution process to the given tasks.

研究分野：教育工学

キーワード：Cinderella 動的幾何 TeX 静的幾何 KeTCindy Sportscode ワークシート分析 行動分析

### 1. 研究開始当初の背景

我々研究グループは、本研究開始以前の段階で、高専・大学初年級で数学の教材作成手段の主流となっている TeX で編集された文書の中に、正確で見やすい図を挿入するため、数式処理システム(CAS)の TeX 挿図用マクロパッケージ KETpic (<http://ketpic.com>)を開発し、その教育効果を検証してきた。その結果、KETpic による正確な描画が一定の教育効果を持つことが確認されてきたが、その一方で、一般の教員がこのシステムを利用する場合、コマンドラインでの入力を求められる上に、TeX を最終的にコンパイルしてみるまで出来上がりの図がイメージできない点で、ユーザーインターフェースが今ひとつであることも同時に認識されてきた。そうした中で、数学的なモデルをインタラクティブに操作できる動的幾何ソフト(DGS)として世界的に広く利用されている Cinderella (<https://www.cinderella.de>)の機能として、ユーザーフレンドリーなスクリプト言語(CindyScript)が整備されており、画面上の描画の制御にとどまらず、ファイルの読み込みや書き出しにも対応していることがわかってきた。このような状況をふまえて我々は、Cinderella の動的な描画に際して計算されるデータを取り出して TeX 描画用のコードに変換し、画面上で数理的モデルを操作しながら TeX 上の描画に直接結びつけられるようなシステムを模索することとなった。

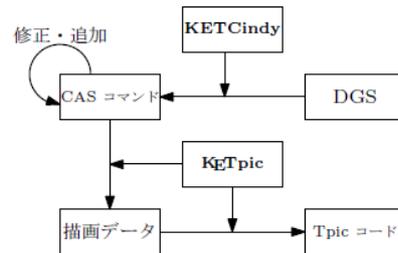
### 2. 研究の目的

学習者が計算などを伴いつつ数学的な推論を進める上で、紙媒体が基本となることはもちろんであるが、動的幾何には数理的モデルを直接手で動かせるという独特な強みがあり(文献 ) 紙媒体とは異なった役割を果たしうるということが容易に想像される。そこで本研究では、これらの連携を可能にするシステムを構築すると同時に、連携ならではの教育効果がどこにあるのか、検証することを目的とした。より詳しくは以下の通りである。

- (1) Cinderella の動的な描画に際して計算されるデータを TeX の描画コードに変換するシステムを構築し、TeX 文書中の静的な描画と Cinderella 画面上での動的な描画との連携を可能にするシステムを構築すること。
- (2) 微分積分学などの変数を含む数理的モデルを理解する上で、動的幾何における手で動かせる描画が有効であることは想像に難くない。一方、理解できたことを知識として定着させるためには、紙媒体をベースとした計算を中心とする推論が不可欠であることも明らかである。そこで本研究では、(1)で構築した連携システムが、上記のような異なる側面を有する学習者の推論経過にどのように寄与するか、検証することも目的とする。

### 3. 研究の方法

(1)の連携システム構築については、当初、Cinderella の開発者である U. Kortenkamp 氏の助言もあって、Cinderella から直接 TeX の描画コードを出力させることも検討したが、前身となる KETpic が CAS を出発点としていたことをふまえ、下図のようなフローに従うこととした。

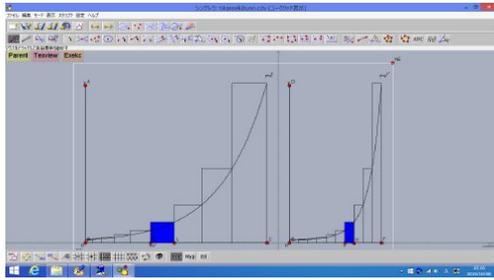


つまり、TeX 描画のもとになる CAS ファイルを出力させるための Cinderella のライブラリとして KeTCindy を作成し、生成されたファイルに含まれるコマンドを CAS に実行させて描画用の Tpic コードを得た後、KETpic を用いて TeX でコンパイルすることにより最終的な描画出力を得るというものである。

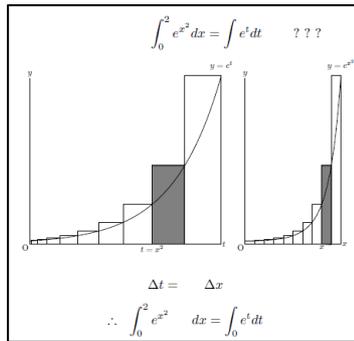
(2)の教育効果検証については、主として Cinderella による数理的モデルの動的な提示を行う前後で、紙媒体上の学習者の思考過程に生じる変化を追跡することを中心とした。追跡方法としては、ワークシートの分析に加え、作業経過の録画画像を行動分析ソフトとして広く利用されている Sportscode (<https://www.hudl.com/elite/sportscode>)に取り込み、作業内容を分類した上で、分類に応じた時系列的なコーディングをして可視化する方法を用いた。後者の方法のように、学習者の行動を時系列的にコード化して分析する方法は近年見られるようになってくるが(文献 ) 数学教育の分野ではまだ珍しいと考えられる。これは、結果として意味のある分析結果が得られるような学習者の思考プロセスの分類自体が必ずしも容易ではないことに起因すると考えられる。

### 4. 研究成果

連携システムの構築については、インストールの方法についてまだ若干の流動的な部分が残っているものの、最新版をウェブサイト(<http://ketpic.com>)からユーザーの OS に合わせてダウンロードし、フリーに利用することが可能になっている。幾何的な図形や関数のグラフといった、数学教育で頻出する 2 次元描画については、相当の広範囲にわたって対応が可能である上、CAS のコマンド生成から TeX のコンパイルまでの一連の作業をバッチ処理によって一気に行える機構を整備して、ユーザーにとって非常に使いやすい形が実現できている。例えば下図は、微分積分学で重要な概念である「置換積分」のメカニズムを説明するために、Cinderella による動的な描画を行ったものである。



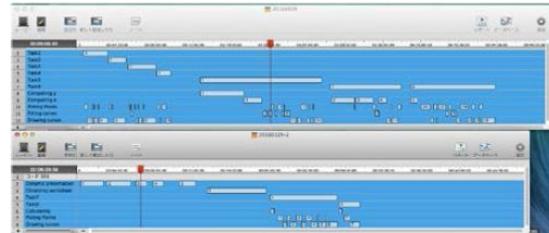
これをボタン操作のみで PDF の静的な描画に変換した上で、下図のような数式表現を伴った教材の中に埋め込むことが簡単にできる。



さらに、PC の内部時計の情報を取得しながら描画を行う Cinderella の機能とうまく連携して、PDF 上のアニメーションを TeX 経由で生成させるためのパッケージも開発している(論文)。また、TeX では微調整が難しい作表について、これを図形として描画させ、レイアウトを柔軟に整えられる機能なども装備されており、TeX による教材作成環境自体の向上にも寄与している(論文)。Cinderella と同じく動的幾何として知られる GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) と比較したときに、数式処理が併せて装備されていないことを弱点ととらえる向きもあるが、Java を母体とする Cinderella はバッチ処理によって他の CAS を起動して書き出したファイルを受け渡し、記述されたプログラムを実行させ、その計算結果を再び読み込んで動的な描画にフィードバックすることができるので、Scilab, Maxima, R などの幅広い計算ソフトとの連携による動的描画が実現している(論文)。

教育効果の検証を行うための教授テーマとしては、学習者の定着度が問題となりやすく、描画メカニズムの把握の不十分さがその背景となっていることが想定される「三角関数のグラフ描画」をまず選んだ。大学入学者に対するリメディアルの授業の一環として、教科書などの紙媒体のみで学習してきた対象者のグラフ描画行動が、描画メカニズムの Cinderella による動的提示を観察することを経てどのように変化するか、ワークシートと描画行動の録画の両面から分析した。その結果、グラフの描画プロセスが組織化され、結果として作業が著しく効率化されることが確認された(論文・発表)。下図は、Cinderella による動的な提示前後における同程度の難易度のグラフに関する描画行動

を、「x の値の計算」「通過点のプロット」などの要素に分類し、録画をもとに Sportscodex による時系列的なコーディングを行った結果である。ポストテスト(下半分)の描画では、プレテスト(上半分)と比べ、異なる要素の間の遷移が減ると同時に、遷移のパターンが規則的になってきていることが見て取れる。同時に、動的提示の際に、描画メカニズムの直感的理解をうかがわせる被験者の発語が確認され、上記の描画行動の変容と深く関連することが示唆された。



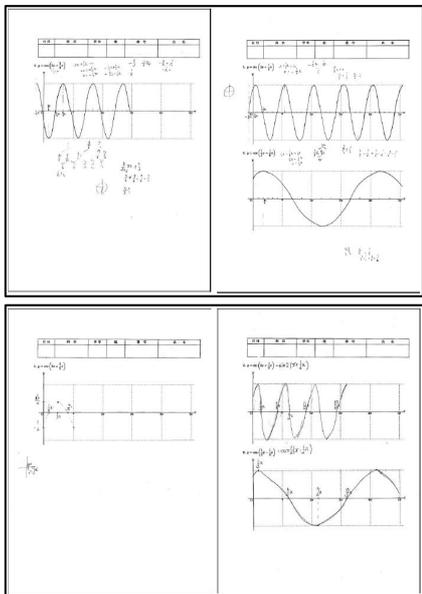
さらに、1 週間後に同程度の課題を課した際のコーディング結果(下図の下半分)をポストテスト(上半分)と比べると、残念ながら、周期の計算でミスをしているものの、ポストテストにおける描画プロセスの組織化が維持されていることが確認できる。



以上の結果は、描画メカニズムの動的提示によって、描画手続きに関する長期記憶化がもたらされる可能性が高いこと、および、長期記憶に蓄積されるのが周期や位相差などの細部の知識でなく、描画に関わる行動様式とでもいうべきより深層に属するものであることを強く示唆する。同様の試行をより多くの被験者に対し実施した際のワークシート分析からも、ポストテストのワークシートをプレテストのワークシートと比較した時に、周期や位相差といった個別の要素以上に、グラフの周期性や対称性に関する改善が顕著であることが確認できた(発表)。

このように、数理的モデルの動的な提示を紙媒体での静的な提示と連携させることに特有の効果を期待しうるわけであるが、本来 Piaget の研究(文献)などで想定されているのは、学習者が動いているモデルを「見る」だけでなく、自身の手でモデルを「操作すること」である。本研究の開始時点では想定していなかったが、Cinderella で生成した動的な教材を HTML 形式に自動的にフォーマットし、アプリケーションのインストールを要せずにブラウザ上で動かせるシステムとして CindyJS (<https://cindyjs.org>) の開発が急速に進んだことにより、動的な教材を iPad などのタブレット PC に入れて学習者に操作

させられる環境が整ってきた。さらに、学習管理システムとして利用が広がりつつある Moodle に CindyJS の教材を手軽に実装できるプラグインを構築し(論文・発表)、授業中などに提示した動的教材をウェブサイトにアップロードし、学習者がスマホなどで即時に開いて操作できるようにもなっている。このため、数理的モデルを見せることと操作させることとの差異に関する検証が、本研究の目的として新たに加わることとなった。手始めに、上記の三角関数のグラフ描画に関する実験授業において、Cinderella を用いて描画メカニズムの動的提示を行なった群 A と、内容的に変わらない CindyJS の教材を iPad 上で操作させた群 B とで、ワークシートの状況を比較すると同時に、操作させた際の発語や手の動き・ジェスチャーを録画により調べることにした。下図は各群の被験者のワークシートから典型的なサンプルを一つずつとったものである。それぞれ、左半分がプレテスト、右半分がポストテストに該当する。

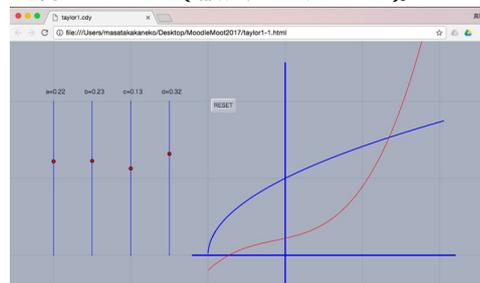


結果として、特にプレテストの達成度が低い事例に注目した場合、グラフ内外に書き込まれているメモの内容から判断して、群 A ではポストテストにおいてプレテストと同様の描画方略をとっているものが多いのに対し、群 B では描画方略が変化している例が顕著に多いことがわかってきた。より具体的には、群 B において、代入計算や図示によって三角比の計算を実行する場面が目立って減少し、周期と位相差に基づくパター的な描画に方略が遷移している事例が多く観察された。また、次図は操作中の被験者の手の動きと発語の状況を記録した録画だが、操作開始後しばらくの間は単位円上の点をゆっくり動かしながらグラフの描かれていく様子を観察する場面が目立つのに対し、時間の経過とともに点を動かす速度が速くなり、より広域的な形状の観察に移行していることが確認できる。さらに、この遷移が確認された後の段

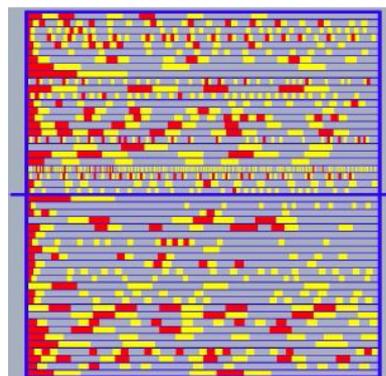
階で、一部の被験者から、単位円上での点の周期的な運動を体性感覚により認識していることを示唆する発語があった(発表)。こうした操作時の状況が上述のワークシート上の変化に反映されていることは容易に想像のつくところである。



以上の結果からは、数学教育における知識定着型の活動において、数理的モデルの動的提示が寄与しうる部分が厳然として存在することが強く示唆されるが、学習者自身がモデルを操作することの寄与がより本格的に期待されるのは、探求型の活動においてであることは言うまでもない。このため、関数の多項式近似を探索的に行うための下図のような教材を CindyJS によって作成し、学習者がこれを操作した際のボタン操作の経過について、Sportscode を経由して可視化する試みも行っている(論文・発表)。



さらに、Sportscode によるコーディングの結果を CindyJS に取り込み、多くのサンプルにおける時系列的な遷移を一覧に表示したものが下図であり、ここからは、操作方針の遷移を特徴づけられるようなシグナルもいくつか見出されている(論文・発表)。



このように、学習者の活動を可視化してその内容を特徴づけるシグナルを探索する研究は、今後世界的にも広がることが想定される。本研究のスキームは、こうした方向性に一定の役割を果たし得るものと期待される。

<引用文献>

J. Piaget, The role of action in the development of thinking, In: Overton W.F., Gallagher J.M. (eds.), Knowledge and Development, 17--43 (1977)

益川弘如, 学ぶ力の潜在性を引き出す実践学としての学習科学, 日本教育工学会第31回全国大会シンポジウム講演資料, 2015年,

<https://www.jset.gr.jp/taikai31/pdf/SI-B202-03.pdf>

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計20件)

Noda T., Kaneko M., Collaborative use of mathematical content generated by CindyJS on tablets, 査読有, Lecture Notes in Computer Science に掲載決定, 2018年

金子真隆・中原敬広・中村泰之, CindyJSによるコンテンツのWeb上での利用について, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録2067, pp.37-46, 2018年

野田健夫・高遠節夫, KeTCindyのC呼び出し機能と曲線・曲面論の教材作成, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録2067, pp.132-141, 2018年

大内俊二・高遠節夫, 自習・反転授業のための音声つきPDF教材の開発, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録2067, pp.183-189, 2018年

Kaneko M., Using tangible contents generated by CindyJS and its influence on mathematical cognition, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 10407, pp.199-215, 2017年, DOI:10.1007/978-3-319-62401-3\_15

Nishiura K., Ouchi S., Usui K., Analysis of the use of teaching materials generated by KeTCindy as an aid to the understanding of mathematics, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 10407, pp.216-227, 2017年, DOI:10.1007/978-3-319-62401-3\_16

Takato S., Brachistochrone problem as teaching material – Application of KeTCindy with Maxima, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 10407, pp.251-261, 2017年, DOI:10.1007/978-3-319-62401-3\_19

Nakamura Y., Nakahara T., Kaneko M., Takato S., Authoring quizzes with interactive content on the mathematics

e-learning system STACK, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 10407, pp.273-284, 2017年, DOI:10.1007/978-3-319-62401-3\_21

Galvez A., Takato S., Kaneko M., Del Ser J., Iglesias A., KETpic-Matlab toolbox for LaTeX high-quality graphical artwork in educational materials on Bezier curve algorithms at a master level, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 10407, pp.301-316, 2017年, DOI:10.1007/978-3-319-62401-3\_23

Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Nishiura K., Makishita H., Takato S., Collaborative use of KeTCindy and other mathematical tools, 査読有, The electronic journal of mathematics and technology 11-2, pp.100-111, 2017年, [https://php.radford.edu/~ejmt/delivery/Boy.php?paper=eJMT\\_v11n2n2](https://php.radford.edu/~ejmt/delivery/Boy.php?paper=eJMT_v11n2n2)

Takato S., McAndrew A., Vallejo J. A., Kaneko M., Collaborative use of KeTCindy and free computer algebra systems, 査読有, Mathematics in computer science 7-2, pp.1-12, 2017年, DOI:10.1007/s11786-017-0303-7

金子真隆, CindyJSを用いたアクティブラーニングの可能性, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録2022, pp.48-58, 2017年

高遠節夫, TeXによる教材作成環境の充実, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録2022, pp.118-127, 2017年

小林茂樹・高遠節夫, KeTCindyとMaxima, Risa/Asirとの連携, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録2022, pp.128-135, 2017年

Kaneko M., The actual use of KeTCindy in education, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 9725, pp.342-350, 2016年, DOI:10.1007/978-3-319-42432-3\_42

Kobayashi S., Takato S., Cooperation of KeTCindy and computer algebra system, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 9725, pp.351-358, 2016年, DOI:10.1007/978-3-319-42432-3\_43

Takato S., What is and how to use KeTCindy, 査読有, Lecture Notes in Computer Science 9725, pp.371-379, 2016年, DOI:10.1007/978-3-319-42432-3\_46

Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Maeda Y., Nakamura Y., Kortenkamp U., Takato S., KeTCindy – collaboration of Cinderella and KETpic --, 査読有, International journal of technology in mathematics education

22-4, pp.179-186, 2015 年  
金子真隆・高遠節夫, KeTCindy による  
TeX 上のアニメーション生成とその教育  
利用, 査読無, 京都大学数理解析研究所  
講究録 1978, pp.215-227, 2015 年  
高遠節夫, KeTCindy の開発について, 査  
読無, 京都大学数理解析研究所講究録  
1978, pp.173-182, 2015 年

[学会発表](計 2 2 件)

Noda T., Kaneko M., Collaborative use  
of mathematical content generated by  
CindyJS on tablets, ICMS2018, 2018 年  
Kaneko M., Using tangible contents  
generated by CindyJS and its influence  
on mathematical cognition,  
ICCSA2017, 2017 年  
Nishiura K., Ouchi S., Usui K.,  
Analysis of the use of teaching  
materials generated by KeTCindy as  
an aid to the understanding of  
mathematics, ICCSA2017, 2017 年  
Takato S., Brachistochrone problem as  
teaching material – Application of  
KeTCindy with Maxima, ICCSA2017,  
2017 年  
Nakamura Y., Nakahara T., Kaneko M.,  
Takato S., Authoring quizzes with  
interactive content on the mathematics  
e-learning system STACK, ICCSA2017,  
2017 年  
金子真隆, CindyJS によるタンジブルな  
教材の操作履歴に基づく数学学習者の思  
考過程の追跡, 日本教育工学会第 33 回全  
国大会, 2017 年  
金子真隆, ワークシート分析からみた  
CindyJS によるタンジブルな教材が数学  
学習者のグラフ描画にもたらす影響, 日  
本科学教育学会第 41 回年会, 2017 年  
中村泰之・中原敬広・金子真隆, 動的幾  
何ソフトウェア Cinderella.2 で作成した  
コンテンツの利用を可能にするプラグイ  
ンの開発, Moodle Moot 2017, 2017 年  
Kaneko M., Interactive manipulation  
of mathematical models via touch  
devices affecting reasoning processes,  
MathUI 2017, 2017 年  
Kaneko M., The actual use of  
KeTCindy in education, ICMS2016,  
2016 年  
Kobayashi S., Takato S., Cooperation of  
KeTCindy and computer algebra  
system, ICMS2016, 2016 年  
Takato S., What is and how to use  
KeTCindy, ICMS2016, 2016 年  
Kaneko M., Takato S., Collaborative  
use of KeTCindy with CAS,  
CADGME2016, 2016 年  
金子真隆, 学習者の行動観察からみた動  
的・静的幾何連携のもつ可能性, 日本教

育工学会第 34 回全国大会, 2016 年  
金子真隆, ワークシート分析からみた動  
的・静的幾何連携による効果的授業設計,  
日本科学教育学会第 40 回年会, 2016 年  
Kaneko M., Yamashita S., Makishita  
H., Maeda Y., Hamaguchi N.,  
Kobayashi S., Takato S., KeTCindy –  
supporting tool to convert students’  
findings into knowledge in collegiate  
mathematics education -- , ISIS  
summit Vienna, 2015 年  
Kaneko M., KeTCindy – linkage  
between Cinderella and KETpic -- ,  
KNUE conference for mathematics  
education, 2015 年  
Kaneko M., Makishita H., Yamashita  
S., Kitahara K., Takato S., KeTCindy –  
linkage between dynamic geometry  
and TeX graphics -- , ATCM2015, 2015  
年  
金子真隆・大島利雄・高遠節夫, TeX 描画  
と描画データの数学的处理との有機的連  
携, 日本数学会年会, 2016 年  
金子真隆, 高遠節夫, 動的・静的幾何の連  
携による数学教材作成システムの開発,  
日本教育工学会第 32 回全国大会, 2015  
年  
① 金子真隆・高遠節夫, 動的幾何と静的幾  
何の連携による数学の授業設計, 日本科  
学教育学会第 39 回年会, 2015 年  
② 高遠節夫・金子真隆, TeX/数式処理によ  
る教材作成, 日本数式処理学会合同分科  
会, 2016 年

[その他]  
ホームページ <http://ketpic.com>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金子 真隆 (KANeko, Masataka)  
東邦大学・薬学部・教授  
研究者番号: 9 0 3 1 1 0 0 0

(2) 研究分担者

大内 俊二 (OUCHI, Shunji)  
下関市立大学・経済学部・教授  
研究者番号: 0 0 2 1 3 6 2 9

高遠 節夫 (TAKATO, Setsuo)  
東邦大学・理学部・訪問教授  
研究者番号: 3 0 1 6 3 2 2 3

山下 哲 (YAMASHITA, Satoshi)  
木更津工業高等専門学校・基礎学系・教授  
研究者番号: 4 0 2 5 9 8 2 5

阿原 一志 (AHARA, Kazushi)  
明治大学・総合数理学部・専任教授  
研究者番号: 8 0 2 4 7 1 4 7