様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　３０　年　　６　月　２５　日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０３３９５

研究課題名（和文）確率解析の手法を用いた統計的逐次解析の理論とその応用

研究課題名（英文）Statistical Sequential Analysis via Stochastic Calculus and It's Application

研究代表者
永井　圭二（NAGAI, KEIJI）

横浜国立大学・大学院国際社会科学研究院・教授

研究者番号：５０３１１８６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：　局所対立仮説に関する逐次単位根検定の理論をAR(p)モデル適用し，局所対立仮説の統計的逐次検定の理論を構築した．そこでは，帰無仮説(単位根)と局所対立仮説の検定は標準正規分布N(0,1)とN(μ,1)の検定になることを示された．このことにより，逐次的単位根検定はADF検定と異なり，局所一様最強力検定となることがわかる．さらに，帰無仮説と局所対立仮説における 停止時刻の漸近分布 (Bessel過程で表現される) が求められた．
　また，定常なAR(p)モデルについての統計的逐次推定に関し停止時刻の漸近正規性を導いた．これにより時系列の統計的逐次解析が実用可能になったと言ってよい．

研究成果の概要（英文）：We consider a sequentially observed unstable AR(p) process with a unit root or a near unit root and provide a sequential testing procedure corresponding to the augmented Dickey-Fuller test in non-sequential sampling. Modifying the stopping time for AR(1) in Lai and Siegmund (1983), we introduce a stopping time based on observed Fisher information for AR(p). The sequential testing procedure has LAN(local asymptotic normality), which can be shown by the time change of the score process using its quadratic variation in Ornstein-Uhlenbeck process. The asymptotic property of the stopping time is characterized by the Bessel process, which makes possible to obtain its asymptotic moments. A testing procedure using the quantile of the asymptotic distribution of the stopping time is a

研究分野：数理統計学

キーワード：時系列解析　統計的逐次解析　停止時刻　ｐ階自己回帰過程　単位根検定　局所漸近正規　汎関数中心極限定理　確率解析

１．研究開始当初の背景

本研究では時間とともに変化する社会現象や経済状況のデータをオンラインで観測される状況を考える．オンラインで観測されたデータに関して注目を集めていることは，① 変化が起きた後のモデルの特定化と推定，② 将来の未知の変化の早期探索，2 点であると考えられる．

一般に使われている統計解析をオンラインデータでそのまま使おうとすると，統計家がある程度信頼できるサンプルサイズを事前に決めて，推定や検定などを行うということになるが，オンラインデータを想定する統計的逐次解析では，サンプルサイズは統計家が事前に決めるのではなく，現在観測が行われているデータが従っているモデルにあわせて Fisher 情報量や Kullback-Leibler 情報量の水準により決定する．オンラインの状況を考えた時，社会現象・経済状況等の変化後，精緻なモデルの推測のためのサンプリングコストには機会費用が含まれる．機会費用には劇的な変化によるリスクに直面した時の費用も含まれる．時系列での劇的な変化はモデルが定常から非定常に変化したとき（または非定常から定常への変化）であると我々は考える．定常・非定常の検定は一般には単位根検定であるが，オンラインデータにおいて定常時系列が非定常時系列に突然変化することは極めて重大な，リスクをもたらすかもしれない変化である．過去のオフラインデータでは，そのようなリスクに直面するといった機会費用はもう過ぎ去っていて，統計家には関係がない．ゆえに，データがオンラインで観測される際，予めサンプルサイズを固定しなくて，その時点まで累積してきた情報を用いて，統計的逐次解析手法により，その変化の状態を解析することがより適切であると考えられる．

理論の着想は， Lai and Siegmund (1983) による非定常な場合を含む AR(1) の逐次推定をベースに， AR(1) の逐次単位根検定の理論を得たところに始まる．そこで理論の中核となる AR(p) の単位根検定の LAN の性質と停止時に関する OC の計算方法を得た．また Galtchouk and Konev (2004) の定常 AR(p) の逐次推定の理論をもちいて単位根検定のあとの定常部分の推定に利用しようという発想を得て， 非定常 AR(p) の研究の決定版である Chan and Wei (1988) の統計的逐次解析バージョンを得ようと考えたのが，本研究の着想にいたった経緯である．

Fisher 情報量もちいた停止時を用いて，AR(1) に関する統計的逐次解析は創始したのは Lai and Siegmund (1983) である．彼らは，誤差項が i.i.d.(0, σ^2) の定数項のない AR(1) モデルに対し，正規誤差を想定して計算される自己回帰係数の（観測された）Fisher 情報量を考え，Fisher 情報量が事前に設定した水準 c に達した時点で止まる停止時 $N(c)$ を考えた．その際，AR(1) がたとえ単位根過程であっても，Fisher 情報量の事前水準 c を大きくしたとき，サンプルサイズ $N(c)$ の t 統計量は漸近的に標準正規分布に従うということを示している．通常のオフライン観測の下での最小二乗法から得られる t 統計量は DF t 統計量と呼ばれ，漸近分布は標準正規分布にはならず，誤差項の和であるランダムウォークが作るブラウン運動で表記される．一方， Galtchouk and Konev (2004) は，誤差項が i.i.d. (0, σ^2) の定数項のない 定常 AR(p)に関して，係数パラメータ全体に関するフィッシャー情報量行列のトレースノルムを用いて停止時を定めて，一様漸近正規性を求めた．

２．研究の目的

従来の非逐次サンプルの場合，AR(p)モデルについての先行研究を簡単に述べる．ここで，定数項なしで，誤差項は独立同一分布に従い，期待値 0，有限分散 σ^2 を持つと仮定する．自己回帰係数 β を持つ AR(1)モデルについて，Fuller などのテキストにあるように，定常な場合(|β|< 1)，β の OLS 推定量及び，誤差分散の推定量は漸近正規性をもつ．非定常な場合(|β| = 1)，β の t 統計量は DF t 統計量と言われ，非正規な漸近分布を持つ．定常 AR(p)モデルについて， Brockwell and Davis など通常なテキストにあるように，自己回帰係数の OLS 推定量及び，誤差分散の推定量の漸近正規性はよく知られている．

逐次サンプルの場合，AR(1)モデルについては，Lai and Siegmund は停止時刻を Fisher 情報量の水準が初めて閾値 c を越えた時点と定義し，この停止時刻までのサンプルについて，c を大きくしたとき，以下の結論を得た: ① t 統計量はβ（|β|=<1）の値によらず，漸近正規性を持つ．② 定常な場合(|β|<1)停止時刻は一致性を持つ．③ 非定常な場合(β=1) 停止時刻は非正規分布に分布収束する．定常 AR(p)モデルの統計的逐次推定に関しては，Galtchouk and Konev は同様にに①～③の結果を得た．

３．研究の方法

統計的逐次推定・検定の問題および逐次的変化点探索の問題では，非局所パラメータの場合と局所パラメータの場合があり，それぞれ重要であるが，時系列データが観測される場合，それらの問題を分析可能にする方法は，ターゲットパラメーターに局所対立仮説を想定し連続時間の確率過程の問題に帰着させることである．応用上重要となるのは，第 1 種の誤りや第 2 種の誤りを犯す過誤確率や期待停止時刻といった動作特性（Operating Characteristics, OC）の解析的評価である．解析的評価は特殊関数でなされ，数値計算が可能となり，シミュレーションと比較することで有効性が確認される．

本研究で提案する統計的逐次解析による検定・変化点探索に関する OC は，離散時間

モデルを連続時間モデルで近似したとき，ブラウン運動や拡散過程の汎関数の確率・期待値として表される．そのときそれらの値は、特殊関数を用いて数値解析が可能であることがわかる．
停止時刻の極限分布が，D[0,∞)の上の確率測度の弱収束の理論と確率解析の手法を用いて 帰無仮説 と 局所対立仮説 のそれぞれの下で，DDS ブラウン運動と Bessel 過程で表現されることがわかる．本研究で提案した定常な AR(p)モデルの停止時刻の中心極限定理を分析する時用いられる統計的手法は，確率変数が非独立である場合にも適用できる．

本研究では問題の出発点として，AR(p) がオンラインで観測される場合を想定し，単位根を持つ可能性がある場合を考え，ADF 検定 (augmented Dickey-Fuller test; 拡張 ADF 検定) を，単位根に関する Fisher 情報量に基づいた停止時までのサンプルでおこなうことを考える．ここで重要な点は通常のオフラインの場合の ADF の検定統計量は DF 検定と同様に漸近的には非正規であるのに対し，オンラインサンプリングで単位根に関する Fisher 情報量に基づく停止時を用いた ADF 検定の検定統計量は漸近正規性を有するという点である．この事実は研究代表者が京都工芸繊維大学人見光太郎氏と京都大学西山慶彦氏との研究により得られたものである．重要な点は他にもあり，オフラインの DF 検定も ADF 検定も最適性をもちあわせていないが，局所パラメータを導入した場合 Fisher 情報量に基づく停止時を用いた拡張 DF 検定は，極限ではブラウン運動と OU 過程 (Ornstein-Uhlenbeck process)の尤度比検定になっており，Fisher 情報量でサンプリングをとめることで LAN の性質を持っていることを我々は確認している．また，停止時の期待値や分散などの OC は DDS ブラウン運動 (Dambis-Dubins-Shwartz Brownian motion) を使うことで Bessel 過程の推移密度関数を用いて求められることも我々は得ている．(単位根検定については Fuller (1996) および Tanaka (2017) 参照，DDS ブラウン運動および Bessel 過程については Revuz and Yor (1999) 参照)．

本研究課題の核心は，研究代表者がおこなってきた単位根検定の研究をもとに，非定常 AR(p) などの和分過程の和分の次数（単位根の数）を特定化し，自己回帰モデルの次数 p の同定，パラメータの推定， Fisher 情報量を用いた停止時で統計的逐次解析を展開することである．

４．研究成果
本研究代表者は，人見光太郎氏と西山慶彦氏とともに，オンラインで逐次観測される時系列に関して，①AR(1) に対する DF 検定，②一般線形過程を誤差に持つ単位根過程に対する Phillips 検定，③AR(p)に対する ADF 検定，の３つの単位根検定を統計的逐次解析の手法を用いて理論研究を行ってきた．本研究課題では，一般線形過程を誤差にもつ和分過程といった非定常時系列がオンラインで観測されるとき，単位根検定および和分次数の同定の問題を，統計的逐次解析の手法をもちいて開発する．その上でモデルの特定化，パラメータの推定，変化点の探索，といった問題に対して，それぞれに応じた停止時刻を複数用意して， Fisher 情報量や Kullback-Leibler 情報量に基づく停止時刻を用いて，統計的逐次解析を展開する．

統計的逐次解析の非定常時系列に対する応用として，単位根検定や変化点探索といった問題を考えたものは研究代表者が関わる研究以外は存在しない．前例がないという点，独自であり，内容的にも独創的である．なぜならば理論的に LAN という一様最強力検定という結果がともなっている．時系列の分野では LAN の性質をもつものはきわめてかぎられていたが，単位根検定という最適性を持ち合わせない手法が，逐次解析では最適性をもつのである．また，DDS ブラウン運動や Bessel 過程といった確率解析の技法を統計学の分野で始めて応用したのも研究代表者の発案だからである．

（参考文献）

Chan, N. H. and Wei, C. Z. (1988). “Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes,” ***Annals of Statistics***, **16**, 367-401.

Fuller, W. A. (1996). ***Introduction to statistical time series***, 2nd Edition, Wiley, New York.

Galtchouk, L. and Konev, V. (2004). “On uniform asymptotic normality of sequential least squares estimators for the parameters in a stable AR(p),” ***Journal of Multivariate Analysis,*** **91**, 119-142.

Lai, T. L. and Siegmund, D. (1983). “Fixed Accuracy Estimation of an Autoregressive Parameter,” ***Annals of Statistics***, **11**, 478-485.

Revuz, D. and Yor, M. (1999). ***Continuous Martingales and Brownian Motion,*** 3rd Edition, Springer.

Tanaka, K. (2017). ***Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory***, 2nd Edition, Wiley, New York.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　　件）

〔学会発表〕（計　　件）

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　永井　圭二　　（NAGAI,Keiji）
　横浜国立大学・大学院国際社会科学研究院・教授
　研究者番号：50311866