

令和元年6月27日現在

機関番号：11302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04402

研究課題名(和文) 乗法概念領域の概念間のつながりに着目した教授・学習に関する臨床的研究

研究課題名(英文) Clinical study on teaching and learning focused on connection between concepts of multiplicative conceptual field

研究代表者

市川 啓 (ICHIKAWA, HIRAKU)

宮城教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：20624745

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：乗法概念領域における概念間のつながりに着目して、その教授・学習を臨床的に検討した。概念の進展の様相を捉えるための枠組みについて、検討した。「ユニット化」と「ノルム化」を観点として、5つの視点を見いだした。1あたりを示さない問題において、倍比例の推論ができたからといって、等分比例の推論ができるわけではないことがわかった。特に、求めたい数量の測度空間のノルム化が乗法的にできないとき、等分比例の推論ができないことがわかった。測定に基づく倍の意味の拡張の学習指導の研究では、誤ったユニット化によるユニットの妥当性を検討する活動により、ノルム化が顕在化し、正しいユニット化の仕方が見いだせることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

乗法概念領域に係る学習は、小学校算数科の中核をなし、中学校数学科の関数や高等学校数学科の微分積分に連なる重要な学習内容である。しかしながら、全国学力・学習状況調査等、様々な学力調査において乗除法の意味や割合、単位量当たりの大きさなどに学習指導の課題があることが指摘され続けている。これらの学習指導の改善が叫ばれてはいるが、改善に至っていないと言いがたい。根本的な解決のためには、概念間のつながりを意識したカリキュラムのもとで、学習者の理解の過渡的な状況を適切に評価し、学習指導に活かした実践を行うことが求められると考える。本研究は、その基礎を提供するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：Focusing on the connection between concepts in the multiplicative concept domain, we examined the teaching and learning clinically. We examined the framework to capture the aspect of the progress of the concept. Five viewpoints were found from the viewpoint of "unitizing" and "norming". It turns out that even if it is possible to infer double proportions in a problem that does not show per part, it is not possible to infer equal proportions. In particular, it was found that when the norm of the measure space of the quantity to be obtained can not be multiplicatively, it is impossible to infer proportional division. In the study of learning instruction of expansion of double meaning based on measurement, it was found that the activity of examining the validity of the unit by wrong unitizing reveals the norming and finds out the correct unitizing way.

研究分野：教科教育学

キーワード：算数・数学科 乗法概念領域

### 1. 研究開始当初の背景

乗法概念領域とは、乗除法や比、比例、単位量当たりの大きさや割合等を含む、概念間の有機的なつながりをとらえた枠組みである。小学校算数科の中核をなす学習内容であると同時に、中学校の関数、高等学校の微分積分へと続く数学学習の基礎をなす。しかしながら、PISA調査や全国学力学習状況調査をはじめとする各種学力調査に基づいて、その学習がうまくいっていないことが指摘され続けている。これらの問題は、それぞれが単独に存在するのではなく、それぞれの概念が有機的に絡み合うなかで、複合的にうまく学習できない状況であると捉えることができる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、乗法概念領域の概念間のつながりに着目して、子ども達の概念や推論の過渡的状況や進展のプロセスをとらえるための枠組みを構築、精緻化するとともに、概念や推論の進展を意図して構想・実施した実験授業における児童の学習の様相を先の枠組みからとらえ、そこでの考察をもとに、概念や推論の進展を促すための教授・学習や、それらの評価に関わる示唆を見出すことである。

### 3. 研究の方法

- (1) 乗法概念領域に係る国内の教育史、特に「割合」が強調された昭和33年の学習指導要領、その当時に作成された教科書、その当時に起こった割合論争に関する資料を収集し、検討する。また、海外の乗法概念領域、概念形成に係る認知的な先行研究に関する資料を収集し、検討する。
- (2) 現職教員との研究会を立ち上げ、小学生、中学生を対象とした乗法概念領域における概念や推論の進展を意図した教授実験を計画、実施し、データの収集を行う。
- (3) (2)の教授実験における子どもの反応を、乗法概念領域における概念や推論の進展の点から分析・考察するための枠組みの構築・精緻化を行う。それと平行して、その枠組みを基にしながら、子どもの学習の様相を分析・考察する。

### 4. 研究成果

#### (1) 進展を捉えるための枠組みとその精緻化

「ユニット化」「ノルム化」を観点とした考察

「求めたい数量の測度空間」と「手がかりになる数量の測度空間」がどのように関係付きながら認識されていくかに着目する。最終的には(Sfard, 1987)の構造的理解を目指す。過渡的状況を捉えるため、「Unitizing」「Norming」(Lamonn, 1994)という観点を参考にし、**「ユニット化」「ノルム化」という2つの観点を設定する。「ユニット化」とは、ユニットをつくることであり、「ノルム化」とは、ユニットで対象を再構成することである。ユニットは単一の測度空間内でつくられる場合と、異なる測度空間のユニット同士が組み合わせられ新しいユニットがつけられる場合の両方を含むものとする。**

その観点から、次のような視点で学習者の様相を捉えていく。

- ・どちらの測度空間に着目してユニット化がなされているのか、いくのか。
- ・どのようにしてユニットがつけられているのか、いくのか。
- ・そのことともう一方の測度空間のユニット化がどう関連しているのか、いくのか。
- ・異なる測度空間のユニット同士がどのように関連しているのか、いくのか。
- ・ユニット化・ノルム化にあたって均質性をどう認めるか。

比例的推論の類型化

倍比例 : 一方の数量がn倍になれば、それに伴ってもう一方の数量もn倍になる。

等分比例 : 一方の数量がn等分になれば、それに伴ってもう一方の数量もn等分になる。

#### (2) 事例研究に基づく学習指導、評価への示唆

等分除と割合、比例の関わり

4年生を対象に、1あたりを示さない問題を用いて、倍比例、等分比例の推論の進展を意図した実験授業を行い、思考の様相を探った。その結果、等分比例の推論ができる児童は概ね倍比例の推論ができるが、倍比例の推論ができるからと言って等分比例の推論ができるわけではないことがわかった。このことから、簡単な等分比例ができることが、比例的推論進展のための一つのキーポイントになることがわかった。

倍比例を活用して解決できる問題場面において、求めたい数量のノルム化が加法的である子どもは、等分比例の推論がうまくできていなかった。

5年生を対象に、純小数でわる小数の除法に焦点をあてて、等分除的に1より小さい数でわることの意味指導の改善を試みた。純小数でわることによって何が求まるかが子どもにとっての問題であることがわかった。0.5mの重さが200gのパイプを題材にして、等分比例の推論に基づき  $200 \div 5$  によって0.1mの重さが求まること、 $200 \div 50$  によって0.01

mの重さが求まることを確かめ、「除数」と「商が何mあたりの重さを表しているか」の変化のきまりを反省的に振り返ることで、 $200 \div 0.5$  によって1 mあたりの重さが求まることを子どもが確信できることがわかった。

6年生を対象に、真分数でわる分数除に焦点をあてて、等分的に1より小さい数でわることの意味指導の改善を試みた。形式を統一する観点から「分数でわる式を立てたいが立ててよいか」について児童が議論し、判断できるようになることを目指した。仮に立てた分数除の計算結果と、整数の範囲の比例的推論で求めた値が一致すること、整数の範囲の比例的推論に基づいて立てた式を変形すると、仮に立てた分数除の式と一致すること、の2点をもって分数除の式を立ててよいと結論付けることができることを実証できた。

#### 乗法、割合、比例の関わり

数学教育史からのアプローチによって、割合がもっとも強調された昭和33年の学習指導要領と時期を同じくして生じた割合論争の検討から、割合が強調された背景に分数の乗除を小学校で学習することがあり、この点から乗除法と割合の関連付けについて検討した。整数の範囲の倍比例と等分比例の推論に基づいて、整数の乗除の組み合わせで答えが求められる速さに関する問題場面を設定し、形式を統一する点から式を見直した。その結果、子どもが割合の見方を働かせることによって、分数の乗法として表し直すことができることを実証できた。

#### 測定、割合、比例、包含除の関わり

割合の概念が顕在化する小数倍の学習について、割進む除法を学習する前に、再測定の操作に基づいて割合を小数で表す問題解決を行い、測定から倍概念への進展を探ることを試みた。小数倍の概念の進展でポイントとなる1と見た大きさの0.1にあたる大きさを特定し、「倍の意味としても解釈できる一つの数量」に伴って「もう一方の数量」も10等分すればよいという手続きを子ども達が見いだすプロセスを構成することができた。特に、0.1にあたる大きさを100gとする間違っただけのユニット化の妥当性を検討するとき、つくり出したユニットによって基準を再構成することが表面化し、それを反省的に振り返ることを通して正しい下位ユニットの作り出し方を見いだすことができることを実証できた。

#### 乗除法と比例の関わり：特に均質性に関する仮定の意識化の点から

日常の事象の問題を乗除法を用いて解決する場合、その背景にある比例関係をどう認めるかが問題となる。教材論的には比例を仮定するわけだが、整数の乗法を用いる場面の「倍比例の推論」と整数の除法を用いる場面の「等分比例の推論」では仮定することが異なっていることを明確にし、子供たちが「具体的に何を仮定しているか」を意識化できるよう実践を第5学年から6学年にかけて2年間行った。その結果、場面が変わっても自分たちで均質化の仮定ができ、また乗除法を用いて得られた結果について仮定を踏まえて解釈できるようになることが実証できた。

#### <引用・参考文献>

- Sfard, A. (1987). On the nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, February 1991, Volume 22, Issue 1, pp 1-36.
- Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). East Sussex, UK: Psychology press.
- Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive Foundation in Unitizing and Norming. G. Harel & Confley (Eds.). *The developing of MULTIPLICATIVE REASONING in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of York Press. pp. 89-120
- 市川啓 (2003). 「割合の見方を育てる小数倍の意味指導」. *日本数学教育学会誌*. 第85巻第12号. pp. 31-40
- 市川啓 (2004). 「子供の小数倍の概念獲得プロセスに関する考察: Unitizing と Norming を観点として」. 第37回数学教育論文発表会論文集. pp. 349-354
- 市川啓 (2006). 「小数の除法の意味の指導 「整数÷整数=小数」の学習における小数倍の意味の検討」. 新算数教育研究会編集. *新しい算数研究*. 東洋館出版社. pp. 13-15
- 久下谷明 (2017). 「倍の考えを育む学習 第4学年「小数倍」の学習に焦点をあてて」. *日本数学教育学会誌*. 第99巻第8号. pp. 4-13
- 中村光一 (2001). 「除法導入期における子どもの除法概念の様相: 対象, 対象を扱う方法, 対象の作り出し方」. *日本数学教育学会誌*. 第83巻第8号. pp. 2-11
- 中村光一 (2011). 「整数の除法 除法の問題場面での4年生の子どもの比例的推論の実態」. *日本数学教育学会誌*. 第93巻第6号. pp. 2-9
- 中村亨史 (1996). 「小数の乗法の割合による意味づけ」. *日本数学教育学会誌*. 第7巻第

10号.pp.7-13

成澤結香里・市川啓(2013)「倍概念の進展を促す学習指導 第4学年において、小数で倍を表すことの学習指導に焦点をあてて」日本数学教育学会誌第95回大会特集号.p.80

杉山吉茂(2012)。「倍と割合 倍がわかれば、割合もわかる？」算数授業論究「割合」に強くなる.pp.4-7

田端輝彦・市川啓(2001)。「小数倍の意味指導の改善 数直線に目盛りを書く活動を通して」学芸大数学教育研究.第13号.pp.65-74

田端輝彦(2001)。「小数倍の導入についての一考察 小数倍に表すよさに焦点をあてて」日本数学教育学会誌.第83巻第12号.pp.4-13

渡会陽平(2004)。「小学校算数科における乗除法の学習過程の分析：G.Vergnaud1の「乗法構造」を手がかりに」.第42回数学教育論文発表会論文集.pp.301-306

和田義信(1959)。「小学校 学習指導要領の展開 算数科編」.明治図書

和田義信(1959)。「実践研究講座 算数科指導の科学」.東洋館出版社

平成26年度 全国学力学習状況調査報告書.文部科学省

平成20年 小学校学習指導要領解説 算数編.文部科学省.

⑳ 昭和33年学習指導要領.文部科学省.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計5件)

市川 啓、変化と関係領域が目指す新しい授業づくりとは、新しい算数研究、査読無、No577、東洋館出版社、2019、pp.8-11

市川 啓、倍概念の進展を促す指導、初等教育資料、査読無、No966、東洋館出版社、2018、pp.86-89

市川 啓、成澤 結香里、再測定の結果を小数を用いて表す学習指導に関する研究 小数倍の概念の進展を目指して、東北数学教育学会年報、査読有、第49号、2018、pp.44-56

市川 啓、新領域における教材と授業づくり 数学的活動をいかに組織するか、新しい算数研究、査読無、No565、東洋館出版社、2018、pp.8-11

市川 啓、「割合でとらえる」とは、新しい算数研究、査読無、No552、東洋館出版社、2017、pp.4-7

〔学会発表〕(計13件)

市川啓、成澤結香里、割合の概念形成を意図したかけ算導入期の乗法の意味づけに関する考察、東北数学教育学会第24回初夏研究会、2019年5月25日、山形大学小白川キャンパス(山形県山形市)

白石円、市川啓、乗除法を用いる前提となる仮定の意識化を目指した学習指導、日本数学教育学会第100回全国(東京)大会、2018年8月3~4日、北区立王子小学校(東京都北区)

成澤結香里、市川啓、分数でわることの意味指導の改善、日本数学教育学会第100回全国(東京)大会、2018年8月3~4日、北区立王子小学校(東京都北区)

市川啓、成澤結香里、分数でわることの意味指導の改善、東北数学教育学会第23回初夏研究会、2018年5月26日、福島大学(福島県福島市)

市川啓、成澤結香里、形式の統一を図ることを目指した分数の乗法に関する学習指導：第6学年に「速さ」が位置づけられていることを生かして、東北数学教育学会第49回年会、2017年11月26日、岩手大学(岩手県盛岡市)

市川啓、成澤結香里、ユニット化・ノルム化を視点とした乗法概念領域の学習指導、東北数学教育学会第22回初夏研究会、2017年6月3日、秋田大学(秋田県秋田市)

成澤結香里、市川啓、第4学年「包含除の意味の拡張」の学習指導 ~指導順序の考察に基づいて~、日本数学教育学会第99回全国(和歌山)大会、2017年8月7~8日、和歌山市立伏虎義務教育学校(和歌山県和歌山市)

門間祐、市川啓、比例の学習を前提とした割合の意味指導 小学校第6学年の比例の学習で割合を見直す、日本数学教育学会第99回全国(和歌山)大会、2017年8月5~8日、和歌山市立伏虎義務教育学校(和歌山県和歌山市)

市川啓、成澤結香里、公理的方法の考えに基づく小数乗除の学習指導の実践的提案、東北数学教育学会第48回年会、2016年11月26日、福島大学国際交流館「チェンバ舟場」(福島県福島市)

門間祐、市川啓、乗除法の意味理解に向けた教授・学習の研究 4年小数倍の実験授業の工夫点に対する考察、日本数学教育学会第98回全国(岐阜)大会、2016年8月3日、岐阜大学教育学部附属小・中学校(岐阜県岐阜市)

市川啓、成澤結香里、倍の意味の拡張とそれに伴う包含除の意味の拡張の楽手指導に関する実践的提案、東北数学教育学会 第21回初夏研究会、2016年6月4日、山形市(学習空間 mana-vi)(山形県山形市)

市川啓、成澤結香里、乗法概念領域における比例を核とした概念形成の教授・学習に関する考察、東北数学教育学会、2015年11月28日、秋田大学（秋田県秋田市）  
成澤結香里、市川啓、等分比例の推論を大切にされた除法の意味指導、日本数学教育学会第97回全国（北海道）大会、2015年8月7日、札幌市立桑園小学校（北海道札幌市）

〔図書〕(計1件)

算数科教育学研究会（編集者 中村光一、蒔苗直道、著者 市川 啓 他24名）、東洋館出版社、新版 算数科教育研究、2019、130-136

〔産業財産権〕

出願状況（計0件）

取得状況（計0件）

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：中村 光一

ローマ字氏名：(NAKAMURA, kouichi)

所属研究機関名：東京学芸大学

部局名：教育学部

職名：教授

研究者番号（8桁）：80225218

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：高橋 丈夫

ローマ字氏名：(TAKAHASHI, Takeo)

研究協力者氏名：小野 雄祐

ローマ字氏名：(ONO, Yusuke)

研究協力者氏名：成澤 結香里

ローマ字氏名：(NARISAWA, Yukari)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。