

令和 元年 9 月 2 日現在

機関番号：31302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04510

研究課題名(和文)射影量に関する教育課程・教育内容・教育方法の開発

研究課題名(英文)Development of an educational curriculum / content / method for teaching the "projective quantity".

研究代表者

加藤 卓 (Katou, Takashi)

東北学院大学・文学部・教授

研究者番号：10709140

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：ドイツでは州による差はあるが、割合や速さなどの射影量に関しては、具体的事象の第一・第二用法の問題がG6で、全用法の型分けされた複雑な問題がG7で学習される。はじめに等しい比で統一された解決方法が学習され、公式による解決はG7からである。そのため日本のG5・6での公式使用は早い。また、射影量の問題解決力・記述力の到達度を高める次の教育方法を開発した。学習計画は第二・一・三用法の順に行う。問題解決時に乗除数量関係図で条件を整理し、図を読んで数量の関係を理解し、第二用法で立式する。記述は図の加工・換算から求める答えに向かって順に行う。以上をもとに日本での射影量に関する教育課程・内容・方法を開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、複雑な文章問題は連鎖・複線型の前後に加工・換算が付随する8演算構造に集約できることを示し、演算構造の認知が問題解決力の向上に關与する可能性を示した。また、正解率の高い解決方法として、乗除数量関係図を用い第二用法で立式する方略を示し、問題解決過程を記述する内容と順序を明示した。開発した問題解決・記述方法を反復しながら学習するワークシートを完成させ、さらに、理想的な教育課程・内容・方法を示した。

これらにより、領域固有の知識の習得が不可欠とされている複雑な文章問題の問題解決力の向上方法と問題解決過程の記述力を高める教育方法に関する一つの突破口を示したという学術的意義・社会的意義を持つ。

研究成果の概要(英文)：In Germany, the problem of the first and second usages of specific events is studied in G6, and complex classified problems, including all usage, are studied in G7 with respect to the "projective quantity" such as rates and speeds. The solutions are limited in cases of equal ratios at the beginning, and the solutions obtained using the formulas are studied from in G7. Thus, using formulas begin earlier in Japan.

We have also developed an educational method to improve the level of problem solving and descriptive ability. The learning plan is executed in the order of second, first, and third usages. While solving the problems, we organize the conditions in a multiplication-and-division quantity relation diagram. The descriptions should be given in the following order: from processing and conversion of the figure to seeking the answer.

Based on the above information, we have developed an educational curriculum / content / method for teaching the "projective quantity" in Japan.

研究分野：数学教育・情報教育

キーワード：射影量 割合 速さ 記述力 教育課程 教育内容 教育方法 国際比較調査

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

日本では、藤井淳一が、「量の数学的構造1」(1983)で、数学的構造の視点から、多様な量を「線形量・アフィン量・射影量」の3つに分類し、一般に複合量・内包量と呼ばれる速度・圧力・濃度・密度等は射影量として認識できることを指摘している。

また、射影量の問題解決の困難性に関しては、演算の3用法から分類した原因を行動論的・認知論的な観点で示した研究が多数ある。しかし、2009年から開始された「全国学力・学習状況調査」が示す結果では、B問題の特に割合等の射影量に関する文章題の正答率・記述力が極めて低い。これまで様々な教育実践が行われてきたが、B問題の正答率は向上せず、「思考力・記述や論述力」は高められていない。つまり、従来の研究では、射影量の指導の困難性を包括的に解決できる教育課程・教育内容の提案が無いため、正答率の向上には結びついていない。

日本では射影量に関する学習は、小学校5学年から開始され、方程式に発展する。中学以降の数学・物理・化学等の理数系思考力・表現力と興味・関心を培う重要な学習内容である。各射影量は、最終的に3量関係の公式にまとめられるが、量概念が十分に獲得できていないうちに公式を使用させても、量感の育成や意味理解が為されない弊害がある。そのため、日本では射影量の学習で多くの児童・生徒が学習困難を経験し、理数系学部への進路を諦めることにつながっていると思われる。日本の国際競争力の向上・復活には、科学技術の基になる理数系の思考力・記述や論述力の育成が不可欠である。しかし、日本では進路選択の基準が「とりあえず文系」となっている。理数系大学への進学が回避される大きな原因の一つは、義務教育での割合・速さ等の射影量に関する学習のつまづきに原因が多いであろう。

国外の場合、一国内でも州ごとに違いがあるが、例えば欧米での公式を用いる射影量の教育は、ドイツのギムナジウムのように高等教育を目指す児童に行う。または、ドイツのハウプトシューレや米国やフランスのように比例概念獲得の段階を実生活と結び付け、第5学年から8学年にかけた長いスパイラルの教育課程にした上で、学習の最終段階で公式を提示するに止め、総体的に学習の困難性を回避して行われている。このように、先進国の教育を研究すると日本の現行教育課程は、射影量の教育の困難性を十分に解消できず、指導者個々の努力では改善することができないのが実情である。したがって、射影量に関する教育の国際比較を踏まえ、実効性のある教育課程・教育内容を開発・提示し、「理数系の思考力の基礎となる射影量に関する思考力、記述力や論述力」の着実な向上を図ることが本研究の位置づけである。

2. 研究の目的

- (1) 義務教育での射影量に関する日本と欧米の教育内容・教育計画を精査する。
- (2) 義務教育での射影量に関する教育課程・教育内容・具体的な教育方法を開発する。

3. 研究の方法

西欧におけるドイツは、理数系の思考力を基にした科学技術・工業生産で最も成功を収めている国であるといえる。理数系思考力の育成を支えるドイツの基幹学校であるハウプトシューレの学校視察を通し、射影量に関する国際教育比較調査を行う。ドイツでは州毎に教育方針・就学形態が異なるため、いくつかの州で調査を行い正しい実態を把握する必要がある。そこで、数学教育の研究を行っている研究者の協力を得て、いくつかの州での射影量に関する教育の違いと教科書に記載の無い実際の教育手法の違いについての調査を行う。また、ドイツは州により採用される教科書が異なるため、いくつかの州での教育資料の収集を行う。さらに、国外での教育視察・教育資料の収集と共に数学教育系学会へ参加し発表を行い、研究に関する客観的な意見を求める。必要に応じて追加の調査や学会発表を実施し、国際教育比較調査の精度を高める。調査結果として得られたドイツと日本の教育課程・教育内容・教育方法について比較し、より理想的なカリキュラム案を開発する。

一方、日本国内で到達度が低いままであるのは、射影量に関する文章問題の解決力と記述力である。これらを改善するために、どのような指導が有効であるかを明らかにする。本研究者は、問題解決の困難性に関する先行研究を踏まえ、児童・生徒の実態をもとに、射影量に関する文章題の正答率を向上させるために「乗除数量関係図」を開発した。「乗除数量関係図」は、単位当たり量を一旦2量に戻し4量にして関係を把握する方法であり、図1の特徴を持つ。

異種量の比を使う方法は、公式による念頭操作が苦手な学習者でも解決できる方法としてハウプトシューレの第8学年の教科書に記載されている。また、藤井（1983）の提案を

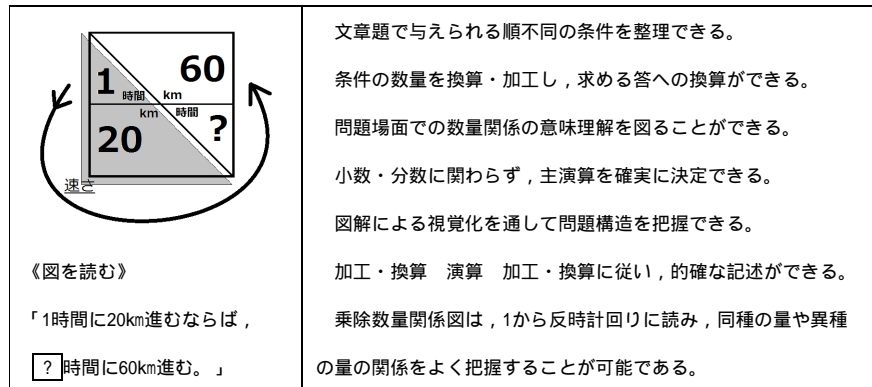


図1 乗除数量関係図

受け、小田敏治は「新しい射影量の学習(2)」(1988)で、射影量の問題を異種の量の比を用いて量感を持たせつつ解決する教育実践を行っている。しかし、本研究者が開発した「数量関係図」は、異種の量の比によって量感を育成するだけでなく、射影量の公式や方程式にまでつながられるという特徴を持つ。これまでの調査により、「乗除数量関係図」を使用すれば、論述力も改善することができるため、以上の「乗除数量関係図」の特徴をさらに生かす指導内容・指導方法を開発する。そこで、以下の2つの研究の方法を採用する。

- ・日本とドイツの射影量に関する教育内容・教育課程について、国際比較調査を行う。
- ・射影量に関する文章問題の解決力と記述力の到達度を高めることを目指した教育実践を行い、理想的な教育課程・教育内容・具体的な教育方法を開発する。

上記の2つの研究方法を通して、包括的に解決できる射影量に関する教育課程・教育内容・具体的な教育方法について、より実証的な研究を進める。

4. 研究成果

(1) 研究の主な成果

はじめに国際教育比較を通して明らかにできた成果を、次に、教育実践を通して明らかにした成果を箇条書きで表す。最後に理想とする開発した理想的な教育課程・教育内容・具体的な教育方法の概要を一覧表として提示する。

国際教育比較に関する成果

ドイツでは、州の教育課程と中等教育校種により差があるが、おおむねG6・7において割合として%が指導され、G6では分数・小数と%の換算や、第1・2用法を中心とした問題が学習される。G7では、比の第1・2・3用法の順に、社会に結びついた様々な文脈の文章題を通して計算で求める方法を本格的に学ぶ。第3用法、第2用法の連鎖と加工換算、複線等の難易度の高い演算構造の問題を、何度も学習する教育計画・教育内容が、教科書と問題集で同様に整っている。今回の調査範囲内では、実際の教育現場で行われている別の指導手法を確認することはできず、1%に実際量に当たる量を求めて解決する方法が徹底されている。解決方法は、はじめに等しい比による方法が学習され、公式による解決はG7からである。さらに、ドイツの教科書には、論述・記述に関する具体的な方法が記載されているものもある(加藤ら, 2017)。

これらから、西欧と比較すれば、日本では、公式の指導が非常に早期から行われ、記述につ

いては、具体的な指導内容・指導方法が示されず個々の指導者に任されているといえる。

教育実践に関する成果

射影量に関する問題解決力を向上させられる効果的な指導計画を明確にし、乗除数量関係（ボックス図）を使用し、記述力も習得させることが出来る教材ワークシート・家庭学習用ワークシートを作成し、使用することができるようにした。次のように研究成果を蓄積した。

はじめに、現行教科書の問題をそのまま使用し、数量関係図を用い、記述力も同時に高められる割合に関するワークブックを作成し、6学年普通学級を対象に割合の復習として授業実践を行った。その結果、割合についての到達度とB問題の記述式問題で正答率を大幅に向上できることを確認した。予備調査と授業実践により、現行の教育課程・教育内容では、数直線よりも数量関係図を使用した指導が6学年児童では効果的であることを明確にした。（加藤ら，2016）

次に、指導計画を比の3用法の第2用法 第1用法 第3用法の順に変更し、割合のワークシートの改訂を行った。5年生を指導対象として教育実践を行った結果、割合についての文章問題の到達度・B問題の記述式の問題の正答率を向上させることができた。この調査により、現行の教育課程・教育内容であれば、2本数直線よりも、数量関係図を使用する指導の方が、正答率と記述力の両面で高い到達度を5学年児童でも実現できることを明確にした。（加藤ら，2017）

また、「割合」についての数量関係図を使用した解決方略や記述力が、学習後、9カ月経過した時点でどの程度、問題解決力・記述力があるかについて調査を行った。その結果、文章問題については、大半の児童が学習した図の記載や第2用法での立式を省略する傾向が強く、正答率が低下したが、第2用法の問題についての正答率は比較的高かった。また、記述式問題での記述力は、学習経過後も比較的到達度が高かった。（加藤ら，2018）

さらに、指導計画を比の3用法の第2用法 第1用法 第3用法の順にし、乗除数量関係図を使用した6学年での「速さ」に関する指導用のワークシートを開発した。5学年で数量関係図を使って「割合」を学習した経験を持つ6学年児童を対象に、開発したワークシートを使用して「速さ」に関する教育実践を行った。その結果、全国規模の調査データが無いために正確な比較は不可能ではあるが、立式段階での正答率は割合の複雑な文章問題の到達度より高い結果であった。また、速さの授業実践を通し、児童にとって同種の量よりも異種の量の方が数量関係を判別しやすいため、異種の量の学習の方が容易であることを確認した。（加藤ら，2019）

教育課程・教育内容・教育方法の提案

射影量に関する教育課程の一番の問題点は、事象のデータを児童自らが記録し検証する活動が極端に少ないことである。教科書に示された数値は仮想現実には過ぎない。現実事象を調べて生きたデータを記録する活動は、まさしく目標である算数・数学の活用力を育成するための根幹であるが、実現には、実施する時間の確保が必要になる。また、小学校高学年での短い期間に集約して学習されていることが学習内容の理解や解決方略を習得しきれない原因になっているため、ある程度の期間をかけて学習することが必要である。

これらのことから、教育課程・教育内容の概要を

表にまとめると表1のようになるが、教育実践を通した検証は、実践環境がないため行われていない。指導方法としては、第2用法から指導する指導計画により、乗除数量関係図を使用し図を

		算数・数学	理科
小学校	1年		
	2年	かけ算	
	3年	乗除関係の問題の乗除数量関係図による指導	
	4年	平均の速さの測定（実測）	
	5年	平均の速さ （第2用法が主軸の乗除数量関係図による問題解決）	
	6年	割合の測定（実測）	
中学校	1年	割合 （乗除数量関係図を活用した問題解決） 1次関数	濃度
	2年		速度
	3年		

表1 教育課程・教育内容の概要

読んで第2用法で立式する解決手順のワークシートを用いる具体的な方法を提案する。

(2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

割合と速さについての具体的な指導方法の改善

指導計画において、第2用法から指導することが、関数の概念に則ったものであるため児童が理解しやすく、忘却率も低いという効果があることを示した。また、現在、主に行われている2本数直線による指導方法よりも、乗除数量関係図による指導方法が、より高い到達度を可能にすることを示した。より効果的な新たな指導方法を提示したことによりインパクトを与えた。

割合と速さの文章題の具体的な解決方法の提示

従来の方は公式を使用した解決方法であるが、最も正答に至ることができる表2の解決方法・手順を具体的に提示した。

また、領域固有の知識の習得が不可欠とされている複雑な文章問題の問題解決力の向上の方策として、複雑な文章問題は連鎖・複線型の前後に加工・換算が付随する8演算構造に集約できることを示し、演算構造の認知が問題解決力の向上に關与する可能性を示した。

<ul style="list-style-type: none">・数量関係図を用いて条件を整理する。・数量関係図により、演算前後の加工・換算に留意する。・数量関係図を読んで数量の関係を把握し、第2用法の立式の理由とする。・第2用法で立式し、必要に応じて式変形して計算を行う。
--

表2 正答率の高い解決方法・手順

具体的な解決方法を提示し、演算構造による新たな視点を提示し、インパクトを与えた。

記述力を育成する具体的な方法の提示

従来は、記述力を育成する具体的な方法が明示されていなかった。問題解決過程の記述に必要な内容と順序を明示し、問題解決の記述を反復して習得できるワークシートを提示した。これにより、問題解決過程の記述力を高める具体的な教育方法の一つの突破口を示した。

(3) 今後の展望

割合については、ドイツと比較して日本の教育課程・教育内容が早く行われている。また、多様な事象の直接体験を礎とした児童の概念獲得と理解の深化を踏まえ、観念的かつ性急に進められてきた。平成29年3月に告示された新学習指導要領では、割合の到達度の改善を目指し、4学年から学習を前倒して行うように改訂された。

そこで将来的には、新学習指導要領の完全実施による割合に関する到達度の変化とともに、関数概念の良好な育成ができているのかを検証した結果に基づき、必要とされる適切な教育課程を継続して提言する。また、中学生が苦手とする証明での論述の能力の育成につながる教育課程・教育内容・教育方法を継続して研究する。特に、乗除数量関係図に文字を利用し、到達度を高め、記述・論述力を高める方法の研究を発展させる。

< 参照 >

- ・ KAKEN, 射影量に関する教育課程・教育内容・教育方法の開発, 2015-2017 研究実績の概要 5. 主な発表論文等 [雑誌論文](計7件)

加藤 卓, 守屋 誠司, 乗除数量関係(ボックス図)を使用した割合に関する問題解決力の変化について, 2018年度秋季例会予稿集, 査読無, 1, 2018, pp.53-55

加藤 卓, 守屋 誠司, ドイツにおける割合に関する教育内容・教育方法について, 数学教育学会2017年度秋季例会予稿集, 査読無, 1, 2017, pp. 76-78

加藤 卓, 守屋 誠司, 進藤 聡彦, 乗除数量関係(ボックス図)を使用した割合に関する教育実践と結果について, 数学教育学会2017年度 春季年会予稿集, 1, 査読無, 2017, pp.119-121

守屋 誠司, 加藤 卓, 進藤 聡彦, ボックス図を使った割合指導の試み - 教育実験による事例

の研究 - , 数学教育学会誌, 査読有, 2016/Vol.57/No.3・4, 2016, pp.211-219

加藤 卓, 守屋 誠司, 進藤 聡彦, 乗除数量関係図(ボックス図)を使用した割合に関する教育内容・方法について, 数学教育学会2016年度秋季例会予稿集, 査読無, 1, 2016, pp.164-166

加藤 卓, 守屋 誠司, 進藤 聡彦, 乗除数量関係図(ボックス図)を使った割合指導の予備実験結果について, 数学教育学会誌臨時増刊, 査読無, 1, 2016, pp.200-202

Takashi Katou, Seiji Moriya, Toshihiko Shindo, "Effects of diagrams showing relationships between variables in solutions to problems concerning relative values.", Contributions to Mathematics Education 2016, 査読無, Band1, 2016, pp.517-520

〔学会発表〕(計8件)

Takashi Katou, Seiji Moriya, "Effects of diagrams showing relationships between variables in solutions to problems concerning Speed.", GDM(Gesellschaft für Didaktik der Mathematik), 06.03.2019, Regensburg (Germany)

加藤 卓, 守屋 誠司, 乗除数量関係(ボックス図)を使用した割合に関する問題解決力の変化について, 数学教育学会, 2018年9月24日, 岡山大学津島キャンパス(岡山県岡山市)

加藤 卓, 守屋 誠司, ドイツにおける割合に関する教育内容・教育方法について, 数学教育学会, 2017年9月13日, 山形大学小白川キャンパス(山形県山形市)

加藤 卓, 守屋 誠司, 進藤 聡彦, 乗除数量関係(ボックス図)を使用した割合に関する教育実践と結果について, 数学教育学会, 2017年3月26日, 首都大学東京南大沢キャンパス(東京都八王子市)

加藤 卓, 守屋 誠司, 進藤 聡彦, 乗除数量関係図(ボックス図)を使用した割合に関する教育内容・方法について, 数学教育学会, 2016年9月16日, 関西大学千里山キャンパス(大阪府吹田市)

Takashi Katou, Seiji Moriya, Toshihiko Shindo, EFFECTS OF STUDENTS REVIEWED "RELATIVE VALUES" USING DIAGRAMS", 13th ICME(International Congress on Mathematical Education), 26.07.2016, Hamburg (Germany)

加藤 卓, 守屋 誠司, 進藤 聡彦, 乗除数量関係図(ボックス図)を使った割合指導の予備実験結果について, 数学教育学会, 2016年3月19日, 筑波大学筑波キャンパス(茨城県つくば市)

Takashi Katou, Seiji Moriya, Toshihiko Shindo, "Improvement of education contents, education method about the relative values using worksheets and method FRQ.", GDM(Gesellschaft für Didaktik der Mathematik), 08.03.2016, Heidelberg (Germany)

〔図書〕(計1件)

・加藤卓, 守屋誠司 他, 玉川大学出版部, 第9章 変化と関係, 小学校指導法 算数(改訂版), 2019 発行予定

〔その他〕

Site URL http://www.ipc.tohoku-gakuin.ac.jp/tkatolabo/t03_15K04510.html

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名: 守屋 誠司

ローマ字氏名: MORIYA, Seiji

所属研究機関名: 玉川大学

部局名: 教育学部

職名: 教授

研究者番号(8桁): 00210196