

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 16 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04770

研究課題名(和文) 部分頂点代数上の加群の研究

研究課題名(英文) modules for a vertex subalgebra

研究代表者

田邊 顕一郎 (tanabe, kenichiro)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：10334038

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：頂点代数の弱加群に関する研究を行った。ハイゼンベルグ頂点代数の位数が2の自己同型に対する不変部分代数に対して、ホイットカーベクトルを持つ既約弱加群を分類した。それらの既約弱加群は、もとのハイゼンベルグ頂点代数の弱加群、またはtwisted弱加群になることが確かめられた。また、ハイゼンベルグ頂点代数の別の部分代数であるsinglet 頂点代数に対して、ホイットカーベクトルを持つ既約弱加群を分類した。

研究成果の概要(英文)：I have studied weak modules for a vertex (operator) algebra. I classified the irreducible weak modules with a Whittaker vector for the fixed point subalgebra of the Heisenberg vertex algebra under the action of an automorphism of order 2. I also obtained similar results for singlet vertex algebras

研究分野：代数学

キーワード：頂点代数

### 1 . 研究開始当初の背景

頂点(作用素)代数上の加群の研究は、頂点代数の研究において非常に重要である。例えば、ポーチャーズによるムーンシャイン予想の解決では、まずフレンケル・レポウスキー・ミュールマンおよびポーチャーズによって、モンスター単純群を自己同型群に持つムーンシャイン頂点代数が構成された。その構成では、リーチ格子に付随する格子頂点作用素代数の、位数 2 の自己同型による不変部分代数を考え、その加群の直和を用いる必要があった。また、 $C_2$  余有限かつ有理的な頂点作用素代数上の既約加群に付随するトレース形式に対しては、ゾーによってモジュラー不変性が示されているように、頂点作用素代数上の加群とモジュラー形式には密接な関連がある。 $C_2$  余有限かつ有理的な頂点作用素代数上の加群に関しては、ゾーの結果から有限次元半単純多元環上の左加群との対応がつくため、多くの研究があり、その性質が分かっている。

しかしながら、ハイゼンベルグ頂点代数、あるいはその部分代数など、 $C_2$  余有限ではないが重要である例はたくさん知られている。それらのいくつかの例に対して、既約加群の分類はされているが、2つの加群のテンソル積が既約になるとは限らず、またその完全可約性も期待できない。より一般に、2つの加群に対してテンソル積が存在することは期待できず、また、存在したとしてもそれが通常の加群になることは期待できない。不変部分代数上の加群を、もとの頂点代数上に誘導したものは必ずしも通常の加群になるわけではなく、少なくとも twisted 加群と呼ばれる通常の加群を拡張したものまで考える必要があることが分かっている。したがって、通常の環上の加群論において行われる、加群のテンソル積をとる、あるいは誘導加群をとるといった操作は頂点代数上では自由に行うことが出来ず、その表現論を十分に展開する際の障害となっている。それらの操作を自由に行うためには、それらの操作で閉じるように、頂点代数上の加群を十分に広く拡張する必要がある。

加群を少し拡張したものとして、次数付けの条件を外した弱加群があるが、弱加群でも十分でないことが分かっている。しかし、弱加群の場合ですら、ゾーの理論を使うことが出来ないため、その性質はよく分かっていなかった。筆者は頂点代数上の弱加群や、それをさらに拡張したものを継続して研究している。

### 2 . 研究の目的

頂点代数上の加群を拡張し、そのテンソル積を構成することにより、頂点代数上の加群論

を自由に展開するための基礎を確立する。テンソル積を用いて、頂点代数上の加群と部分頂点代数上の加群との対応を構成し、特に不変部分代数上の既約加群の分類をおこなう。

### 3 . 研究の方法

有限次元半単純リー代数、ヴィラソロ代数や、アフィンリー代数等の場合には、次数付きでない加群が昔から研究されてきた。Arnal と Pinczon による  $sl_2$  の既約加群の研究において、ホイッタカー加群という次数付きでない既約加群が現れた。その後、Kostant によって一般の有限次元半単純リー代数に対してホイッタカー加群が研究された。Ondrus と Wiesner によってヴィラソロ代数上のホイッタカー加群が分類された。彼らの結果は、ヴィラソロ頂点代数上の次数付きでない既約弱加群の例を与えている。ヴィラソロ代数上の次数付きでない既約加群は、他にも色々構成されているが、必ずしも頂点代数上の加群となっているわけではない。Adamović, Lu, および Zhao によって、あるアフィンリー代数上のホイッタカー加群が分類されている。また、Mazorchuk と Zhao によって、ヴィラソロ頂点代数上の弱加群は、ヴィラソロ代数の正の部分からなる部分代数の既約加群を誘導したものになっていることが示された。この結果はヴィラソロ頂点代数上の既約弱加群の粗い分類を与えている。頂点作用素代数は、ヴィラソロ頂点代数を部分代数として含む。したがって、筆者は与えられた頂点作用素代数  $V$  に対して、上で記述されているヴィラソロ頂点代数上の既約弱加群を含むような既約弱  $V$  加群の分類を考察するという方法をとった。この方法は既に確立しているヴィラソロ頂点代数に関する結果をヒントにして研究出来る利点があり、実行可能性が高い。ヴィラソロ頂点代数に近い、生成元の数が少ない頂点代数に対しては有用である。今まで取り扱いが難しかった頂点作用素代数の弱加群を扱う手法が発展した。

頂点代数の元の積は非常に複雑であるため、その計算には、コンピュータを使用している。使ったソフトは Mathematica と Risa/Asir である。頂点代数の積を計算するプログラムは、自力で組み上げているため、状況に応じて、柔軟に変更できるように出来ている。以前は次数付き加群に最適化して計算していたが、次数付きでない場合も扱う必要があったため、そのようにプログラムを組み直して使用している。

### 4 . 研究成果

頂点作用素代数  $V$  と、その有限位数の自己同

型群  $G$  に対して,  $G$  の作用で固定される  $V$  の元の全体  $V^G$ , つまり不変部分代数は, また頂点代数になる.  $V^G$  加群は, 表現論において自然にあらわれる対象であるとともに, ポーチャーズによるムーンシャイン予想の解決で本質的な役割を果たしたムーンシャイン頂点代数の構成に用いられているように, よい性質をもつ頂点代数の構成への応用があるため, この分野の重要な研究対象となっている.  $V^G$  加群の研究において, 当然最初に問題となるのは  $V$  加群との関連である.

$V$  加群は自然に  $V^G$  加群となることから, 勝手な  $V^G$  加群は  $V$  加群の部分加群として構成できることが期待されるが, これはうまくいかない.  $V^G$  加群を捉えるためには, 少なくとも  $G$  の各元  $g$  ごとに  $g$ -twisted  $V$  加群と呼ばれる  $V$  加群の拡張を考える必要がある. 1-twisted  $V$  加群が通常の  $V$  加群に対応している.  $V^G$  加群における基本的な問題として, 物理学者達による次の予想がある:

予想: 単純な頂点作用素代数  $V$  と, その位数有限の自己同型群  $G$  に対して, 任意の既約  $V^G$  加群は, ある既約な  $g$ -twisted  $V$  加群 ( $g$  は  $G$  の元) の部分加群である.

この予想は, 安部, Dong, Li, Mason, 長友, 宮本, 山田, 筆者等によって多くの例で検証されている. また, この予想は, 加群を弱加群に置き換えても意味をなすが, 弱加群においては検証例は一つもなかった. 通常の加群では,  $\mathcal{Z}$  代数という結合的代数を用いて既約加群を調べることが出来るのだが, 弱加群には, そのような便利な道具がないので, どうやって調べればよいのか今まで分からなかったのである. ハイゼンベルグ頂点代数  $M(1)$  は, 頂点代数において最も簡単な例であるとともに, 格子頂点代数の重要な部分代数にもなっている.  $M(1)$  に対しては, ホイッター加群を構成することは非常に簡単に出来る. 筆者は, それをもとに, 頂点代数とホイッター加群の関係について研究した. ホイッター加群はもともと三角分解をもつリー環に対して定義されているものであるため, リー環に付随する頂点代数の場合を除いて, 一般の頂点代数にどう定義すべきなのかは分かっていなかった. 筆者は, ホイッター加群ではなくホイッターベクトルに注目することにより, ヴィラソロ代数に対するホイッターベクトルをもつ頂点作用素代数の弱加群を考察した. まず, ランクが 1 のハイゼンベルグ頂点作用素代数の, 位数 2 の自己同型に関する不変部分代数に対して, そのような既約弱加群を分類した. この分類結果から, ホイッターベクトルをもつ既約弱加群は, もとのハイゼンベルグ頂点作用素

代数の既約弱加群, または既約 twisted 弱加群に同型になることが分かった. これは, 一般の頂点作用素代数において, 通常の加群に対しては成立していると予想される性質であるが, 弱加群というもとの予想の範囲を超えて, 予想が検証された初めての例になっている. さらに, ホイッターベクトルを持つという条件付きではあるが, 既約弱加群が分類された初めての例にもなっている. 次に, Kausch や Adamović 等によって表現が研究されてきた,  $M(1)$  の別の部分代数の無限系列である singlet 頂点代数に対して, 同様にホイッターベクトルをもつ既約弱加群の分類を行った. これらの弱加群もやはり, ハイゼンベルグ頂点作用素代数の既約弱加群に同型になることが分かった. これらの既約弱加群は, ヴィラソロ代数上のホイッター加群に一致することも示した. これは通常の既約  $M(1)^{+}$  加群では起きなかった現象である. これらのハイゼンベルグ頂点代数における結果を基に, 非退化偶格子  $L$  に付随する頂点代数  $V_{\{L\}}$  の不変部分代数  $V_{\{L\}}^{+}$  上の弱加群の研究を開始した. 格子  $L$  が正定値である場合には  $V_{\{L\}}^{+}$  は頂点作用素代数となり, さらに弱加群は通常の加群になってしまうことから, その(弱)加群はよく調べられてきた. 既約加群は分類されており, 加群の完全可約性も示されている. 一方,  $L$  が正定値でない場合には  $V_{\{L\}}^{+}$  は決して頂点作用素代数にはならない. Yamskulna によって, 通常の加群は分類されており, それらは既約 twisted 加群の部分加群になることが分かっていた. しかし,  $V_{\{L\}}^{+}$  自体は弱加群ではあるが, 通常の加群にはなっておらず, その分類結果には含まれていない. したがって, 弱加群の範囲で既約弱加群を分類する方が自然である. しかし, 弱加群を調べようにもどこから手をつければよいかも分からない状態であった. 筆者はランクが 1 の場合ではあるが, 負定値偶格子  $L$  に付随する頂点代数の不変部分代数  $V_{\{L\}}^{+}$  の既約弱加群の分類に成功し, この状況の突破口を開いた.  $L$  が負定値の場合でも, 正定値の場合と同様に  $V_{\{L\}}^{+}$  の既約弱加群は, 既約弱  $V_L$  加群, または既約 twisted 弱  $V_{\{L\}}$  加群の部分加群に同型になっており, 上に述べた予想が成立することが確かめられた. 分類に現れる既約弱加群のリストも正定値の場合と同様になっている.

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

(1) Kenichiro Tanabe, A generalization of

intertwining operators for vertex operator algebras, Journal of Algebra 491 (2017) 372-401, 査読有. doi: 10.1016/j.jalgebra.2017.08.011

- (2) Kenichiro Tanabe, Simple weak modules for the fixed point subalgebra of the Heisenberg vertex operator algebra of rank 1 by an automorphism of order 2 and Whittaker vectors, Proceedings of the American Mathematical Society 145 (2017) 4127-4140, 査読有. doi: 10.1090/proc/13767
- (3) Kenichiro Tanabe, A generalization of twisted modules over vertex algebras, Journal of the Mathematical Society of Japan 67(3) (2015) 1109-1146, 査読有. doi:10.2969/jmsj/06731109

〔学会発表〕(計 7 件)

- (1) Kenichiro Tanabe, ランク 1 の負定値偶格子に付随する頂点代数の不変部分代数の既約弱加群について, 2018 年 3 月 12 日--3 月 13 日, 筑波大学(茨城県つくば市).
- (2) Kenichiro Tanabe, Simple weak modules for some vertex operator algebras and Whittaker vectors, Finite Groups and Vertex Operator Algebras 2017, 2017 年 3 月 21 日, 東京女子大学(東京都杉並区).
- (3) Kenichiro Tanabe, Simple weak modules for some subalgebras of the Heisenberg vertex algebra and Whittaker vectors, VOA and related topics, 2017 年 3 月 15 日--3 月 16 日, 大阪大学大学院情報科学研究科(大阪府吹田市).
- (4) Kenichiro Tanabe, 頂点代数の表現と結合的代数, 第 61 回 代数学シンポジウム, 016 年 9 月 7 日--9 月 10 日, 佐賀大学本庄キャンパス(佐賀県佐賀市).
- (5) Kenichiro Tanabe, A generalization of intertwining operators for vertex operator algebras, Workshop on finite groups, VOA and algebraic combinatorics, 2016 年 3 月 22 日--3 月 24 日, Foguang University (台湾宜蘭県).
- (6) Kenichiro Tanabe, A generalization of intertwining operators for vertex algebras, Vertex operator algebras and related topics, 2015 年 9 月 7 日--9 月 13 日, Kehuayuan Hotel (中国成都)
- (7) Kenichiro Tanabe, 頂点代数の intertwining operator の一般化について, 第 32 回代数的組合せ論シンポジウム, 2015 年 6 月 22 日--6 月 24 日, 金沢大学サテライト・プラザ(金沢県金沢市)

田邊顕一郎 (TANABE Kenichiro)  
北海道大学・理学研究院・准教授  
研究者番号: 10334038

- (2)研究分担者  
なし
- (3)連携研究者  
なし
- (4)研究協力者  
なし

## 6. 研究組織

- (1)研究代表者