様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１０１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４７７１

研究課題名（和文）３次元カラビ・ヤウ多様体の数論的研究

研究課題名（英文）Arithmetic Study of Calabi-Yau threefolds

研究代表者
後藤　泰宏（Goto, Yasuhiro）

北海道教育大学・教育学部・教授

研究者番号：４０３１２４２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，正標数の体上で定義された３次元カラビ･ヤウ多様体について，その形式群に焦点を当てつつ数論的性質を考察した。主たる研究対象は，３次元重さ付きデルサルト型多様体とBorcea-Voisin型多様体であり，それらの形式群の高さについて多くの新しいデータを得るとともに，ホッジ数をはじめとする多様体の幾何学的性質と形式群の高さとの関係性を調べた。また，その応用としてミラー対称なカラビ・ヤウ多様体の形式群について考察した。

研究成果の概要（英文）：We studied the arithmetic of Calabi-Yau threefolds defined over a field of positive characteristic by placing a focus on their formal groups. The main objects of our study are weighted Delsarte threefolds and Calabi-Yau threefolds of Borcea-Voisin type. For such threefolds, we obtained a lot of new numerical data about the height of their formal groups and described relationships between the height of formal groups and several geometric properties of Calabi-Yau threefolds, such as the Hodge numbers. As an application, we investigated the formal groups of Calabi-Yau threefolds relating each other by mirror symmetry.

研究分野：数論的代数幾何

キーワード：３次元カラビ・ヤウ多様体　形式群　数論幾何　デルサルト型多様体　ミラー対称性　国際研究者交流（カナダ）

１．研究開始当初の背景

本研究の目的は，３次元カラビ・ヤウ多様体の数論的性質を考察することである。研究開始当初においては，弦理論のミラー対称性の研究を中心に複素数体上の３次元カラビ・ヤウ多様体が数多く構成され，その幾何学的性質が深く研究されていた。また，カラビ・ヤウ多様体が数体上でも定義されるときは，そのＬ関数に係る研究も進められていた。一方，形式群に焦点を当てた３次元カラビ・ヤウ多様体の研究は，分野としてはまだ新しい部類に属していた。

少し歴史を遡ると，1990 年代以降のミラー対称性の研究によって，カラビ・ヤウ多様体がいろいろな側面から研究されていた。その中には，ミラー対称な３次元カラビ・ヤウ多様体の具体的構成方法に係わる研究もあり，多様体の群作用による商を用いる方法，トーリック幾何を用いる手法，K3 曲面と楕円曲線の積を用いる Borcea-Voisin の方法等，いろいろな構成方法が見つけられていた。比較的新しい結果としては，細野忍氏と高木寛通氏による Determinantal Quintics という３次元カラビ・ヤウ多様体もあった。

ミラー対称性自体は，複素構造の変形とケーラー構造の変形を調べるものであるため，カラビ・ヤウ多様体を複素数体上で議論することは自然である。その一方で，多様体が数体上や有限体上で定義されるときは，数論的考察も可能となる。上に挙げた多様体はいずれも数体上でも構成が可能であり，多様体のゼータ関数やＬ関数のレベルでミラー対称性を検出しようとした Candelas，de la Ossa，Villegas 氏らの研究や Wan 氏の研究等があった。また，カラビ･ヤウ多様体のモジュラリティを考察した研究もあり，本研究者も Livné 氏と由井典子氏（本研究の研究協力者）と共同でカラビ・ヤウ多様体のモジュラリティに関する研究を行ったことがある。一方，カラビ・ヤウ多様体の形式群については，2000 年前後から van der Geer 氏と桂氏による一連の研究があり，多くの重要な知見がもたらされていた。本研究は，そのような形式群の研究の延長線上に位置し，かつミラー対称性と数論的研究の交差点に置かれていた。

本研究者の研究的背景としては，ミラー対称性を持つ３次元カラビ・ヤウ多様体の中で，４次元重さ付き射影空間内の３次元フェルマー型多様体や，その有限商として得られるデルサルト型多様体の数体上や有限体上における研究があった。そこでの主要結果は，カラビ・ヤウ多様体のゼータ関数，Ｌ関数，形式群の計算である。また，上で述べたようなモジュラリティに関する結果もあった。特に，形式群については，K3 曲面の形式群の高さに関する計算結果や，３次元重さ付きフェルマー型多様体等の形式群に関する結果があった。そのような成果をもとに，これまでの研究手法をさらに広範囲の多様体に適用することを考え，変形理論の観点から形式群とミラー対称性の関係を探ることを目指して本研究を開始した。

２．研究の目的

本研究の目的は，多様体の形式群に焦点を当てながら，有限体上定義される３次元カラビ・ヤウ多様体の数論的性質を考察することである。ここで現れる形式群は１次元の形式群であり，“高さ”という量で分類されることが知られている。また，多様体を変形させる際の座標をうまく選ぶことにより，１次元形式群は２変数の形式的ベキ級数で表現される。

本研究では，まず具体的な多様体を用いた計算により，どのような形式群が現れるかを調べる。そして，形式群と多様体の自己同型群や幾何的性質との関係を探りつつ，形式群を用いたミラー対称性の類似を模索していくことを目的とした。具体的な多様体とは，構成方法を明確に記述できる多様体のことを指し，楕円曲線と K3 曲面の積を群作用で割ることにより定義される Borcea-Voisin 型多様体とその一般化，並びに，３次元（重さ付き）デルサルト型多様体とその変形に注目した。そのような多様体を有限体上で考察し，次の４つの目標に向かって研究を進めた。

(1) ３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の具体的計算

３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群は高さという量で分類されるので，３次元デルサルト型多様体とその変形，及び Borcea-Voisin 型多様体とその一般化を用いて形式群の高さを計算することを目標とした。そして，高さとして現れる値の頻度や傾向，あるいは，多様体の他の性質との関連について調べることを試みた。さらに，時間的に可能であれば Determinantal Quintics という３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群についても考察することとした。

(2) 正標数の変形理論の再吟味

カラビ・ヤウ多様体の形式群については，van der Geer 氏と桂氏の一連の結果が知られている。その結果をミラー対称性の視点から見直すことを一つの目標とした。そして，関連する目標として，形式群においてミラー対称性のような現象を見つけることを設定し，多様体の変形の特徴づけにつながる新しい観点（不変量）を探った。

(3) 多様体のゼータ関数や自己同型写像と形式群との関係

３次元重さ付きデルサルト型多様体の形式群の計算には，ヤコビ和等を用いた多様体のゼータ関数の計算が有効である。また，多様体の自己同型群が大きいほど形式群の高さが小さくなるというデータが得られていた。そのような傾向が一般の３次元カラビ・ヤウ多様体にも現れるのかどうか探ること

を目標とした。

⑷ 形式群とミラー対称性の関係性についての考察
上記目標⑴～⑶の結果を踏まえて，３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群とミラー対称性との関係性，もしくは類似性について調べることを目標とした。目標⑵の段階で形式群の高さ以外に目立った観点が見つからなければ，ミラー対称性の類似を見つけることは難しくなる。その場合は，ミラー対称性をもつ３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さの上限や分布等について考察することとした。

３．研究の方法
本研究で考察した３次元多様体は，３次元重さ付きデルサルト型多様体とその変形，及び Borcea-Voisin 型多様体とその一般化である。そのような多様体を有限体等の正標数の体上で考えることとし，次のような年度毎の計画で研究を進めた。
・１年目には，具体的なカラビ・ヤウ多様体を用いて形式群のデータを集める。
・２年目には，正標数の変形理論を再吟味し，形式群と自己同型群等との関係を探る。
・３年目には，形式群とミラー対称性の関係性について考察する。
以下，研究の方法については，実際の研究活動に係わる部分と数学的な研究手法に関する部分とに分けて記載する。

(1) 実際の研究活動
本研究は，研究代表者の個人的活動を中心とした研究であった。日常的には，代数幾何や数論関係の文献や論文を用いて問題解決に取り組み，定期的にはセミナーや研究集会に参加して専門家たちと情報交換を行いつつ研究の進展を図った。また，国内外で合計４回の研究発表を行い，専門家たちから多くの助言やコメントをもらい，それをフィードバックする形で研究方向の修正や調整を行った。技術面では，計算ソフト Magma や Maple を用いて形式群の計算を行った。
研究会の主催といった大きな研究活動としては，平成 28 年度と 29 年度に函館で開催した研究集会「函館数論幾何ワークショップ」2016 及び 2017 があり，多くの研究者たちと研究情報や意見交換を図った。特に，K3 曲面や Chow 群等の関連分野における研究動向を知ることによって，本研究の推進に役立てた。また，平成 28 年度にはカナダのバンフ国際研究ステーションにおいて国際研究集会 “Modular Forms in String Theory” を開催し本研究の進展につなげた。
なお，本研究のベースは個人的研究にあったが，研究協力者（海外共同研究者）であるクイーンズ大学教授・由井典子氏との連携は本質的に重要であった。由井氏とは，日常的には電子メールで意見交換を行い，年に２度ないし３度直接会って，集中的に議論した。

(2) 数学的研究手法
研究方法の数学的部分は次のとおりである。年度ごとにまとめる。

① 平成 27 年度は，具体的構成法によって定義される数種類の３次元カラビ・ヤウ多様体を用いて，形式群のデータ収集を行った。考察する３次元多様体は，Borcea-Voisin 型多様体とその一般化，並びに，３次元重さ付きデルサルト型多様体である。(Determinantal Quintics という３次元カラビ・ヤウ多様体の考察を可能な限り行うことにしていたが，今回は十分な時間をとることができなかった。）27 年度に行った研究の方向性は次の２つに要約される。
１つは，形式群の高さを計算し，現れる値の頻度や傾向を探ることである。デルサルト型多様体の場合は，クリスタリンコホモロジーの計算によって形式群の高さを求めることができる。計算ソフト Magma を用いて考察することとした。一方，デルサルト型多様体の変形については，形式群の対数を詳しく調べたり，Stienstra-Beukers の Picard-Fuchs 方程式による方法を利用したりして形式群を記述することを試みた。
もう一つの方向性は，多様体の幾何的性質と形式群の高さの関係性を調べることである。形式群の高さは，カラビ・ヤウ多様体の自己同型群や特異点の情報を使ってその値を評価できることがある。そこで，形式群の高さを単に計算するだけでなく，多様体の幾何的特徴と比較しながら互いの関係性を探るという研究を進めた。

② 平成 28 年度は，３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群に関する既知の理論の再吟味を行った。
研究の方向性の１つは，正標数の体上の多様体の変形理論の考察であり，van der Geer 氏と桂氏の結果の再構成を試みた。研究協力者の由井氏にメール等で助言や研究協力を依頼しつつ，形式群の高さ以外の何らかの観点（不変量）の有無を探った。3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さがホッジ数に関係していることから，27 年度に得た計算結果を参考にしつつ，ホッジ数に焦点を当てて多様体の新たな不変量を検討した。
もう一つの方向性は，形式群と多様体の自己同型群等との関係性を探ることである。多様体の自己同型写像が多いほど形式群の高さが小さくなるという実例が得られていたので，そのような傾向が一般の３次元カラビ・ヤウ多様体にもあるかどうか調べることとした。また，特異点解消の際の例外因子の個数と形式群の高さの関係についても探ることとした。

③ 研究計画の最後の年に当たる平成 29 年度は，形式群とミラー対称性の関係性について

考察した。まずは，ミラー対称性をもつことが分かっている３次元カラビ・ヤウ多様体から検討を始めるが，必ずしもミラー対称性にこだわらず，現象的にミラー対称性の類似を見つけることを目標にした。28 年度までの結果を踏まえて，３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群とミラー対称性との関係性，もしくは類似性について調べた。（28 年度の段階で形式群の高さ以外の目立った観点が見つからなかったので，当初の予定通り少し研究の方向を修正して，ミラー対称性を持つ３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さの特徴を探ることとした。）

４．研究成果

本研究の目的は，３次元カラビ・ヤウ多様体を正標数の体上で考え，その形式群などの特徴を調べることであった。研究対象は，３次元重さ付きデルサルト型多様体とその変形，並びに Borcea-Voisin 型多様体とその一般化である。そのような多様体について，形式群の高さのデータを集めるとともに，形式群の高さと多様体の自己同型群との関係性やミラー対称性との関連について調べた。また，カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さとホッジ数との相関についても考察した。

以下では，まず，研究成果を３つの項目に分けて記述する。設定した項目は，「形式群の高さの計算」，「自己同型群と形式群の高さの関係」，「形式群とミラー対称性との関係」である。項目ごとに成果を述べた後，得られた研究成果の位置づけに触れ，今後の課題と展望についてまとめる。

(1) 形式群の高さの計算

特異点の状況が良い（つまり，巡回商特異点しか持たない）３次元重さ付きデルサルト型多様体と Borcea-Voisin 型多様体を用いて形式群の高さを計算した。計算には，計算ソフト Magma を用い，多様体のコホモロジー群に関係するデータを分析することによって組合せ論的な計算に帰着させた。数百個にのぼるカラビ・ヤウ多様体を考察することにより，形式群の高さに関する数多くの実例を集めることができた。また，その値の頻度や傾向等についても分析することができた。中には，46 や 84 といった大きな高さをもつ３次元カラビ・ヤウ多様体の例も見つかり，これまでに知られていなかった高さのデータが数多く収集された。

一方，デルサルト型多様体の形式群の高さを計算した結果，（有限値の）大きな高さを持つ形式群が現れる頻度が低いことや，無限値の高さを持つ３次元カラビ・ヤウ多様体が現れる頻度が思ったよりも大きいこと等，研究当初の予想とはやや異なる現象も見つかった。

さらに，多様体のホッジ数と形式群の高さの関係について調べた。その一例として，３次元デルサルト型多様体の第（2，1）ホッジ数と形式群の高さの相関関係を推測した。その相関性は，例えば次のようなグラフで表すことができる。（横軸がホッジ数で縦軸が形式群の高さである。）

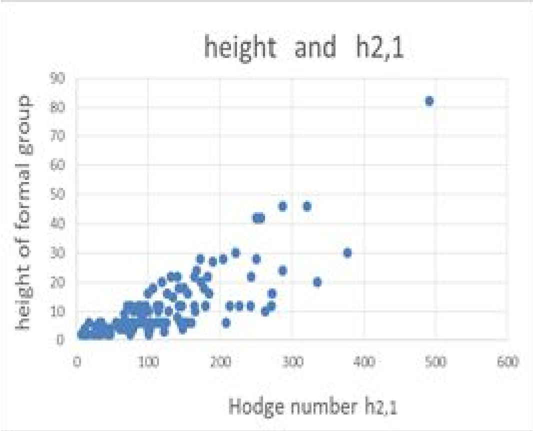

図 ホッジ数と形式群の高さ

なお，ホッジ数と形式群の高さに係わる結果は，平成 27 年度の津田塾大学での研究集会や中国での国際研究集会等で発表した。

(2) 自己同型群と形式群の高さの関係

カラビ・ヤウ多様体の自己同型写像が多いほど形式群の高さが小さくなるという実例を参考に，３次元カラビ・ヤウ多様体の幾何的性質と形式群の高さとの関係性を調べた結果，多様体上の例外因子の数を用いて高さの評価が得られた。簡単に述べると，３次元重さ付きデルサルト型多様体を特異点解消して得られるカラビ･ヤウ多様体の場合は，特異点解消に現れる例外因子が第（2，1）ホッジ数に与える影響が大きいほど形式群の高さが小さくなる。

その一方で，シンプレクティックな自己同型写像が大きくても，あまり例外因子を生じなければ形式群の高さは小さくなるとは限らない。このことに関連して，多様体の定義式の対称性が比較的小さくても，形式群の高さが大きくなるとは限らないことがわかった。（これは研究開始当初の予想と若干異なる結果であった。）

(3) 形式群とミラー対称性との関係

３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さがホッジ数に関係していることから，ホッジ数に焦点を当てて多様体の不変量を調べた。平成 28 年度までに形式群の高さ以外に有効な数量を見つけることができなかったので，当初の計画通り，ミラー対称性を持つ３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さの特徴を探ることとした。

考察の結果，群作用による商によってミラー対称なカラビ･ヤウ多様体がつくられるような場合においては，第（2，1）ホッジ数と第（1，1）ホッジ数によって形式群の高さの上限が与えられることがわかった。また，セ

ルフミラーと呼ばれる特殊な場合においては，形式群の高さが大きいカラビ･ヤウ多様体が現れやすいことを確認した。

(4) 研究成果の位置づけとインパクト

上記の結果は，３次元カラビ・ヤウ多様体の形式群についての新たな知見であり，その高さの具体的なデータを多数得たことは，形式群の事例研究として意義があると考える。また，形式群とミラー対称性との関係は，数論幾何の一部に位置づけられるとともに，正標数の体上のミラー対称性の研究の一端でもある。

なお，本研究の一環として開いた数論幾何に関する研究集会「函館数論幾何ワークショップ」2016 と 2017 は，数論と代数幾何に携わる専門家らの交流を促す一企画となった。

(5) 今後の課題と展望

今後の方向性と課題は，現時点で少なくとも３つ考えられる。

１つ目の課題は，４次元以上のカラビ・ヤウ多様体の形式群の高さの考察である。本研究と同様に，重さ付きデルサルト型多様体を用いて形式群の高さを計算することが可能である。４次元以上については，形式群の高さの計算例が皆無に近い。高さとしてどのような値が現れるか調べてみたい。

２つ目の課題は，形式群の高さの値の頻度に係わる研究である。上記の研究成果の項目で述べたように，大きな高さを持つ形式群が現れる頻度が低いことや，多様体の定義式の対称性が比較的小さくても大きな高さを持つ形式群が現れるとは限らないことなどがわかった。これらの結果は当初の予想と異なるものであるため新たな研究課題となった。

３つ目の課題は，本研究で十分扱えなかった１次元変形付きデルサルト型多様体の研究である。変形を付けると具体的な数値計算が格段に難しくなるものの，Stienstra の方法を用いて計算できる可能性が出てきた。その方法を応用して形式群の高さを考察することを今後の研究課題としたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１　件）

① Yasuhiro Goto, A note on the formal groups of weighted Delsarte threefolds, e-print ArXiv, 査読無, 2018, arXiv:1805.04233, https://arxiv.org/abs/1805.04233

〔学会発表〕（計　４　件）

① Yasuhiro Goto, Calabi-Yau threefolds of Delsarte type and their formal groups, Workshop on Algebraic Varieties, Hodge Theory and Motives, 2018, トロント大学 Fields 数理科学研究所（カナダ，トロント）

② Yasuhiro Goto, Formal groups and related topics of some Calabi-Yau Threefolds, Modular Forms in String Theory, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery (BIRS), 2016（カナダ，バンフ）

③ Yasuhiro Goto , Formal groups of Calabi-Yau varieties in positive characteristic, Workshop on Computational Aspects of Algebraic Geometry, Automorphic Forms and Number Theory, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, 2015 (中国, Sanya)

④ Yasuhiro Goto , Formal groups of various Calabi-Yau varieties, Tsuda College Mini-workshop on Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 2015（津田塾大学）

〔その他〕

北海道教育大学ホームページ・研究者総覧内「後藤泰宏」の項目

http://kensoran.hokkyodai.ac.jp/huehp/KgApp?kyoinId=ymiegggggge&keyword=

６．研究組織

(1)研究代表者

後藤　泰宏（GOTO, Yasuhiro）

北海道教育大学・教育学部・教授

研究者番号：40312425

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

由井　典子（YUI, Noriko）

クイーンズ大学・数理科学研究科・教授