

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04781

研究課題名(和文) 宇宙際幾何学のさらなる展開

研究課題名(英文) Further developments of inter-universal Teichmüller theory

研究代表者

山下 剛 (Yamashita, Go)

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：70444453

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：研究分担者の望月氏により、宇宙際Teichmüller理論を虚数乗法を持つ楕円曲線にも拡張できることが分かった。これにより、宇宙際Teichmüller理論とDirichlet L関数の零点の間に初めて数学的な関係が生まれた。これは今後、宇宙際幾何学のさらなる発展としてのゼータ関数の零点への研究の大きな最初の一步とみなせる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ゼータ関数の零点の研究は極めて困難であるが、宇宙際Teichmüller理論によるabc予想の証明においてはいわゆる「一元体上の微分」に相当する現象が起こっているため、宇宙際幾何学的手法によるアプローチは有力であると思われる。今回、宇宙際Teichmüller理論とDirichlet L関数の零点の間に関係が生まれたことはゼータ関数の零点の研究にとって大きな第一歩である。ゼータ関数の零点に関するRiemann予想はクレイによって挙げられている21世紀に解決すべき7つの問題の1つであり、まだRiemann予想までの道のりは遠いが最初の第一歩を踏み出したことは社会的意義も大きいと感じる。

研究成果の概要(英文)：The co-investigator Mochizuki showed that we can generalise inter-universal Teichmüller theory for elliptic curves with complex multiplications. Hence, he obtained a relationship between inter-universal Teichmüller theory and the zeros of Dirichlet L-functions. This can be regarded as the first step of studies of the zeros of zeta functions via further developments of inter-universal geometry.

研究分野：数論幾何

キーワード：宇宙際Teichmüller理論 遠アーベル幾何 Hodge-Arakelov理論 ゼータ関数 L関数 Siegel零点

## 1. 研究開始当初の背景

研究分担者の望月氏は宇宙際Teichmuller理論を構築し、その帰結としてabc予想を証明した。

「宇宙際」の概念はこれまでにない新しいもので、かつabc予想を証明する程強力なものであり、宇宙際幾何学を発展させることでこれまで証明できなかった他の困難な問題にもアプローチできる可能性がある。

宇宙際Teichmuller理論において、いわゆる「一元体上の微分」(=「数体の微分」)に相当する現象が起こっている。また、abc予想の誤差項の計算において現れる $1/2$ はRiemannゼータ関数の零点との関係を示唆しており、実際に宇宙際Teichmuller理論をさらに発展させて「宇宙際Mellin変換」の理論が構築できればRiemannゼータ関数の零点について理解できるであろうことが観察されていた。

以上のことにより、宇宙際幾何学を発展させてゼータ関数の零点を理解しようという機運が申請者の中で高まった。

## 2. 研究の目的

新しい強力な手法である宇宙際幾何学を発展させて、その可能性を切り開くこと。より具体的には、「宇宙際Mellin変換」の理論の構築によりゼータ関数の零点を理解すること。

## 3. 研究の方法

研究の方法については、「宇宙際側」と「ゼータ関数側」がある。

「宇宙際側」について、宇宙際Teichmuller理論のさらなる発展を研究するための方法は、1つは遠アーベル幾何、もう1つはHodge-Arakelov理論である。Hodge-Arakelov理論的な「物語」を中核とし、遠アーベル幾何はその「物語」を実行する具体的な道具という位置付けである。

宇宙際幾何においては、ある宇宙から他宇宙を見る時に遠アーベル幾何における諸々の復元アルゴリズムを用いて他宇宙を見る。ここでは遠アーベル幾何が不可避免的に重要な役割を果たす。

また、スキーム論的なHodge-Arakelov理論は宇宙際Teichmuller理論では使われないが、その視点がHodge-Arakelov論的評価写像の構成・「Gauss積分」の視点及び「奇跡的な等式」において応用されている。これらの道具を用いて宇宙際Teichmuller理論のさらなる発展を研究する。

「宇宙際Mellin変換」の構築は極めて難しいが、その難しさは、Hodge-Arakelov理論的な「物語」の構築の難しさにある。

一方、「ゼータ関数側」では、ゼータ関数を研究する方法の1つとして解析数論を用いる。特に、Siegel零点はabc予想との関係性が以前より知られており、Chowla-Selberg公式周辺の解析数論が役に立つ。

また、高さ関数を巡る諸々の(遠アーベル幾何とは関連性の薄い)数論幾何も用いる。

#### 4. 研究成果

研究分担者の望月氏により、宇宙際Teichmuller理論を虚数乗法を持つ楕円曲線にも拡張できることが分かった。これにより、宇宙際Teichmuller理論とDirichlet L関数の零点の間に初めて数学的な関係が生まれた。これは今後、宇宙際幾何学のさらなる発展としてのゼータ関数の零点への研究の大きな最初の一歩とみなせる。

虚数乗法を持つ楕円曲線では、(1)至る所良還元を持つためにエタール・テータ関数の理論が使えない、(2)Galois表現の像が小さくなるため宇宙際Teichmuller理論で現れる対称性が崩れる、(3)所望の不等式を得るための初期テータ・データを構築するステップを変更しないとイケない、という3つの問題が生じる。

(1)はアルキメデスの素点でのエタール・テータの理論により解決された。(2)は適宜対称性を修正することで問題がないことが確認された。(3)は以前の一般位置にある楕円曲線の高さ関数に関する研究の変種を示すことで克服された。

宇宙際Mellin変換に関して「Hodge-Arakelov理論的な物語」を見つけることは困難を極め、宇宙際Mellin変換までの道のりはまだ遠いが実際にゼータとの関係が見ついたことは大きいことであり、この方向で研究を進めていきたい。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Go Yamashita	4. 巻 B68
2. 論文標題 A small remark on finite multiple zeta values and $p$ -adic multiple zeta values.	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 171,174
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Go Yamashita	4. 巻 vol. 40, No. 1
2. 論文標題 A small remark on the filtered $\varphi$ -module of Fermat varieties and Stickelberger's theorem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tsukuba J. Math.	6. 最初と最後の頁 119--124.
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.21099/tkbjm/1474747490	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinichi Mochizuki	4. 巻 3
2. 論文標題 Bogomolov's proof of the geometric version of the Szpiro Conjecture from the point of view of inter-universal Teichmüller theory	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Res. Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 3:6
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1186/s40687-016-0057-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinichi Mochizuki	4. 巻 22
2. 論文標題 Topics in Absolute Anabelian Geometry III: Global Reconstruction Algorithms	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 939-1156
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinichi Mochizuki	4. 巻 38
2. 論文標題 Monomorphisms in Categories of Log Schemes	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Kodai Math. J.	6. 最初と最後の頁 365-429
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinichi Mochizuki	4. 巻 3
2. 論文標題 Bogomolov's Proof of the Geometric Version of the Szpiro Conjecture from the Point of View of Inter-universal Teichmüller Theory	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Res. Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 3:6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 A Proof of the ABC Conjecture after Mochizuki
3. 学会等名 Pan Asia Number Theory Conference 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 Reductions of crystalline representations and Hypergeometric polynomials
3. 学会等名 Pan Asia Number Theory Conference 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 A Proof of the ABC Conjecture after Mochizuk
3. 学会等名 seminaire de theorie des nombres at Institut de Mathematiques de Jussieu (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 ABC Conjecture and Inter-universal Teichmuller Theory
3. 学会等名 集中講義於慶應義塾大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 IUTchIII-IV with remarks on the function-theoretic roots of the theory
3. 学会等名 Inter-universal Teichmuller Theory Summit 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shinichi Mochizuki
2. 発表標題 The mathematics of mutually alien copies: from Gaussian integrals to inter-universal Teichmuller theory
3. 学会等名 Inter-universal Teichmuller Theory Summit 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 IUT-III
3. 学会等名 Clay Math. Institute Workshop: IUT Theory of Shinichi Mochizuki (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 IUT-III and IUT-IV section 1 with some remarks on the language of species
3. 学会等名 Clay Math. Institute Workshop: IUT Theory of Shinichi Mochizuki (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Go Yamashita Official Homepage  <a href="http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/">http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/</a>  望月新一@数理研  <a href="http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mochizuki/top-japanese.html">http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mochizuki/top-japanese.html</a></p>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	望月 新一  (Mochizuki Shinichi)  (10243106)	京都大学・数理解析研究所・教授    (14301)	