様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ７ 月　 ２ 日現在

機関番号：１４６０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ０４７８３

研究課題名（和文）保型形式のNewForm理論と岩澤理論への応用

研究課題名（英文）Newform Theory for automorphic forms and its applications to Iwasawa Theory

研究代表者
岡崎　武生（Okazaki, Takeo）

奈良女子大学・自然科学系・准教授

研究者番号：８０４３７３３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：次数2のSiegel 保型形式のNewformとは何であるべきか?どのような性質をもっているのか?といった問題に取り組んだ.この問題は局所体上の代数群GSp(4)の既約 許容表現論の問題である. Roberts, Schmidt氏 [2007 年] によって構築されたPGSp(4)のgeneric既約許容表現(Whittaker 模型を持つ表現)のNewform理論をGSp(4)に拡張し, また, 非generic-表現である斎藤-黒川リフトにおいて, Bessel 模型のNewform理論を構築した.

研究成果の学術的意義や社会的意義
楕円保型形式のNewform理論が, 1970年代に構築され様々な応用があることからSiegel保型形式でもまた重要である.様々な研究分野からも重要視される次数2の正則Siegel保型形式は, 大域Whittaker模型を持たず, 大域Bessel模型でNewform理論を構築することが望まれる. 今回局所Whittaker 模型をもつcaseと大域Bessel模型を持つ1caseである斎藤-黒川リフトでNewform理論を構築した. この結果により一般に, 今回新たに発見した擬-非分裂型paramodular群によりNewform理論が構築されることが期待される.

研究成果の概要（英文）：I tried to construct a newform theory for irreducible admissible representations of GSp(4), that is Siegel modular forms of degree 2 in the classical sense. I have completed to the construction for the generic case, which is a generalization of Roberts and Schmidt for PGSp(4), and for the Saito-Kurokawa lifts, a non-generic case.

研究分野： Number Theory, Automorphic forms

キーワード： 保型形式　保型表現　算術離散群

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1970 年代に楕円保型形式の Whittaker-模型を持つ場合の Newform(新形式)理論が構築され，保型形式以外の様々な分野でも応用が考えられた．例えば，志村-谷山予想は，楕円曲線の導手と楕円保型形式の Newform のレベルの一致が重要である．楕円保型形式の次なるステップとして，次数２のジーゲル保型形式が考えられる．この次数２のジーゲル保型形式は，算術離散群により定義される三次元ジーゲルモジュラー多様体上の微分形式であり，カラビヤウ多様体などがジーゲルモジュラー多様体として現れ，物理学，弦理論からも重要な研究対象である．数論幾何学，保型形式からは，３次元ジーゲル多様体の Hasse-Weil ゼータ-関数と，その多様体の算術離散群で固定される保型形式の Langlands L-関数の関係が今なお，シンプルな場合を除き,わかっていない．
だが，次数２のジーゲル保型形式では長い間 Newform 理論は構築されなかった．然るべき算術離散群の候補も挙がらなかった．　表現論ではよく知られた岩堀群や，古典的ジーゲル保型形式論でよく見られるジーゲル放物型群などでは, Newform 理論を与えられない事がわかっていた．
2007 年, Roberts 氏, Schmidt 氏 [Springer Lec. Note] によって，代数群 PGSp(4)の既約許容表現の Newform 理論，即ち自明な中心指標をもつ次数２のジーゲル保型形式の Newform 理論が，`Whittaker 模型を持つ場合’に構築された．Paramodular 群と呼ばれる算術離散群により固定される保型形式の空間に Newform が一意的に現れるといったものであった．
また GSp(4)の局所 Langlands 予想が,Gan 氏と竹田氏[Ann. Math 2011]により示され，志村-谷山予想のアーベル曲面版である吉田予想[Invent math 1980]が，特殊な場合に限り，Brumer 氏 [Trans. AMS 2013]などにより paramodular 群を使った定式化がなされていた．

２．研究の目的

Roberts 氏，Schmidt 氏の理論は，PGSp(4)の局所 Whittaker 模型をもつ場合だけを扱っているので，これでは不十分である．　例えば，ジーゲル保型形式が中心指標を持つ場合に対応するのは，PGSp(4)の理論ではなく GSp(4)の理論であり，Gan 氏と竹田氏により付与された既約表現の Langlands parameter と Newform はどのような関係があるのか？ といった問題がある．他にも，楕円保型形式同様，或いはそれ以上に他分野からも重要な研究対象である正則ジーゲル保型形式は，大域 Whittaker 模型を持たないことを一因として，様々な研究局面で困難さを増しているのだが，これに対しても局所 Whittaker 模型を持つ場合だけの理論では不十分である．
そこで，一般に, GSp(4)の既約許容表現の Newform 理論の構築に取り組んだ．

３．研究の方法

GL(2)(楕円保型形式)の既約許容表現から GSp(4)のそれを構成したり，GSp(4)のそれから，GL(4)のそれを構成するテータリフトといった方法がある．GL(n)では，局所 Langlands 予想や，Whittaker 模型を持つ場合は, Newform 理論が最近完成しているので，これらのテータリフトを具体的に観察することで, GSp(4)の Newform 理論の構築や, Langlands parameter の関係を導きだすことを試みる．
例えば，GL(2)の Newform を用いて，テータリフトで具体的に構成したものが，GSp(4)の Newform になると考え，　これを固定する離散群の系列によって,GSp(4)の Newform 理論(テータリフトで与えられないものに対しても)が展開されると考えた．

４．研究成果

(１)Whittaker 模型を持つ場合は，Roberts 氏，Schmidt 氏の理論を GSp(4)に拡張した．.彼らの PGSp(4)の理論同様，Newform は，今回新たに定義した擬 paramodular 群(これは Langlands parameter の ε-関数で定まる)で固定される部分空間に一意的に現れるといったものであった．
さらに Newform がもつ，Novodovorsky zeta 積分(解析的に定義される，ゼータ積分とよばれるものの一種)がその既約表現の Langlands L 関数と一致することを示した．
また，擬 paramodular 群で固定される Whittaker 関数の空間の構造を与えた (Oldform 理論).
(２) Whittaker 模型をもたない表現としてよく知られた，また様々な数論、岩沢理論，数論幾何的応用をもつ斎藤-黒川リフトと呼ばれる既約表現において，Bessel 模型の Newform 理論を構築した．
Newform は，今回新たに定義した非分裂型 paramodular 群(これも Langlands parameter の ε-関数で定まる)で固定される部分空間に一意的に現れるといったものであった．
さらに Newform がもつ，Piatetski-Shapiro zeta 積分(解析的に定義される)がその既約表現の Langlands L 関数と一致することを示した．
また, Oldform 理論も与えた．

一般にジーゲル保型形式は，Whittaker 模型を持つとは限らないが，Bessel 模型(Fourier-Bessel 係数)はもつ (Whittaker 模型は持てば本質的に一通りであるのに対し, Bessel 模型は無限通りあ

るが). 例えば, 正則ジーゲル保型形式は, Whittaker 模型を持たない.
（１）の研究を完成し, この結果を踏まえて Bessel 模型での Newform 理論の構築に取り組んだ. だが, 一般の表現の構造は複雑で然るべき理論の最終形想を想像し難かったので, 斎藤-黒川リフトに限って取り組んだ. 斎藤-黒川リフトは, 特殊 Bessel 模型しかもたないといった構造上の利点があったからである.
Piatetski-Shapiro により与えられた函数等式を観察し, 試行錯誤を重ね, 非分裂型 paramodular 群を発見した. この離散群は良い Hecke 理論を生み出し, (2)の Newform 理論の完成にいたった. 斎藤-黒川リフトは, GL(2)の特殊 Waldspurger 模型とも関連し, (2)の結果から, 特殊 Waldspurger 模型の Newform 理論への強力な手がかりを得た. GL(2)保型形式は, 常に Whittaker 模型を持ち, この模型に対する Newform 理論が 1970 年代からあったが, 1980 年代から考察されていた Waldspurger 模型に対してはなかったのである. 様々なテータリフトを考察する上で一般 Waldspurger 模型は自然に現れるものであり, したがって, この模型に対する Newform 理論が完成すれば, (1)同様の手法で, GSp(4)の Bessel 模型の Newform 理論への強力な足がかりになると考えている.
最終的には, GSp(4)の一般の既約表現に対しては, 擬-非分裂型 paramodular 群により Newform 理論が構築されると考えている.
また, 吉田予想も, 非分裂型 paramodular 群により特殊な場合に限らず定式化されることが期待され, 最近進展しつつある Gross-Prasad 予想の Newform による精密化などにより, Abel 曲面の不変量が, Newform の period と関連付くのかもしれない.

（３）１９８０年代 van Geemen 氏, Nygaard 氏により, ある３次元ジーゲル多様体の Betti 数 Hodge 数などの構造が研究されていた. この多様体は,物理学的にも興味のもたれるものであった. 山内卓也氏との共同研究で, この多様体の Hasse-Weil zeta 関数の決定とその上の微分形式(Hecke 固有保型形式)をいくつか与え, Langlands L-関数との関係を調べた.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Takeo Okazaki, Takuya Yamauchi	４．巻 21
２．論文標題 On some Siegel threefold related to the tangent cone of the Fermat quartic surface	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Advances in Theoretical and Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 585-630
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 Takeo Okazaki
２．発表標題 New Form for some algebrai groups
３．学会等名 東京電機大学第 6 回数学講演会
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考