

平成 30 年 6 月 1 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04784

研究課題名(和文) 保型表現の分岐理論と L-特殊値の数論

研究課題名(英文) Ramification theory of automorphic representations and arithmetic of special L-values

研究代表者

石川 佳弘 (Yoshi-Hiro, Ishikawa)

岡山大学・自然科学研究科・助教

研究者番号：50294400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：フェルマ予想(FLT)の様な数論の問題は、非常に広範で深い理論を駆使して研究される。FLTの証明をも含み、70年代より数論研究の支柱たり続けている Langlandsプログラムに沿って、比較的小さい群 $U(3)$ の場合に、その分岐表現と付随する L / ρ 因子を研究した。方針は、 L 関数を上の群を対称性にもつ保型形式という"関数"の積分変換で表示し、その積分の分岐因子をホイタッカー関数を通じて明示的に研究する。 $U(3)$ が実Lie群/ p 進不分岐群の場合から外には、期待通りの性質を持つホイタッカー関数の同定には至らなかった。

研究成果の概要(英文)：Number theory investigation usually involves quite vast area of deep mathematics, like as the Fermat Last Theorem does. The Langlands Program, which led to the settlement of FLT, has been the central strategy of arithmetic since 70s. We follow the LP to study the ramification theory of the group $U(3)$ representations in view point of L / ρ factors. Our approach is resorting to integral presentations of L function of automorphic forms, whose ramified factors give us arithmetic info. The point is to find nice Whittaker functions appearing in the ramified factor. We can successfully detect where/which the nice ones are only in the case of Real/unramified $U(3)$.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 表現論 H-周期 L-関数

1. 研究開始当初の背景

分岐する素点に於いて数論的对象の局所的振舞いを調べる分岐理論は、数論研究に於いて中心的課題の一つであり続けている。局所類体論は完成された一つの典型である。その広範な一般化が、局所体上の代数多様体の分岐理論、ガロア表現の分岐理論として、展開されている。

一般に、数論の重要な問題の多くは、L-関数の性質として翻訳可能である。分岐理論もガロア表現に付随するL-関数の関数等式に現れる ρ -因子の中に深くエンコードされているのである。

しかし、数論的对象から代数的に定義されるL-関数を直接に研究することは、一般には大変困難である。そこで「解析的に定義される保型L-関数の研究に帰着させる」というのが、20世紀中葉以降数論研究の中心戦略となっている(Langlands 哲学)。保型表現の研究が、数論の問題に対して深い結果をもたらすのである。かのフェルマ予想も、一変数保型形式のL-関数と有理係数楕円曲線のL-関数の対応を示す事で解決されたのであった。

近年L-関数の数論研究は次の段階、即ち特殊値の研究に移行してきている。上の対応を通じて、更に深い数論的情報をL-関数から読み取ろうというのである。この段階に於いては、L-関数の分岐因子の精緻な研究が不可欠である。

代数的L-関数のサイドには、多変数/高次元の場合にも、斎藤毅氏のガロア表現の分岐理論、Rapoport, Haines等の算術的商多様体の悪い還元とニアバイサイクルの理論など、高度に発達した研究がある。

しかるに、保型L-関数については、まだまだ分岐因子の研究は立ち遅れている。本質的に一変数保型形式の場合と同様に扱えるGL(2)の保型表現については、深い結果が現れてきているものの、一般の群Gの保型表現に対しては、特殊な状況での散発的研究しかなかった。前課題に於いて、GがU(3)の場合に局所理論の整備をかなりの深度まで行った。これにより、定義すら等閑にされてきた多変数保型形式に対する保型L-関数の分岐L-因子、 ρ -因子を、表現に付随するWhittaker関数の積分変換研究を経由することで、数論の局所的/大域的問題への応用に耐えうるレベルまで明示的に研究できる素地が固まってきた。

2. 研究の目的

以上の研究状況に鑑み、本研究では、前研究課題で得られた結果の伸展と継承として、

「U(3)の保型L-関数の局所理論の補完及び、その大域問題への応用」を目的とする。ここで、大域的問題とは「L-関数の特殊値の研究」を意味し、局所的問題とは「 p -進リ一群G(Q_p)の許容表現 ρ_p の分岐理論」を指している。

3. 研究の方法

(1)<我々の方法>

保型L-関数の研究法には、大きく分けて、あ) Eisenstein 級数の定数項を調べるLanglands-Shahidiの方法と、い) 表現の適切な模型から作られる積分を調べるRankin-Selbergの方法がある。保型表現の黎明期には、「あ)には限界がありい)の方針の方が強力であろう」と信じられていた。しかし、歴史は人々の期待を裏切ることとなる。90年代終わり頃、H.Kimの観察をブレイクスルーとし、あ)は保型L-関数の研究に莫大な進展をもたらした。が、この「流行」も一段落を見、適用可能な場合は取り付くされた感がある。

本研究では、40年前の素朴な方針い)に立ち帰り、Rankin-Selbergの積分を詳細に研究する事で、将来の数論研究に資すべき基礎を構築する。戦略は、「保型表現の局所成分 ρ_p に属するWhittaker関数 W_{ρ_p} を明示的に調べる」という至極単純だが「迂遠な」準備研究を要する正面突破法である。

(2)<他の方法との比較>

L-関数の分岐因子を決定するだけなら、上の方針は「遠回り」をしすぎている。実際、保型表現が「generic」な場合、Whittaker関数の漸近挙動だけから分岐因子は計算できる。これは、GSp(4)の場合はTakloo-Bighashが、U(2,1)の場合には申請者が実行した。また、あ)の方針でも、「generic」な場合にはShahidiが部分的結果を得ている。

それにも拘らず、我々が敢えて明示的研究を志向する理由は、次の二点にある。

i) ゼータ積分を具体的に計算する事で、局所関数等式を ρ -因子の形まで調べられる。これにより、分岐表現 ρ_p の「解析的導手」が定義でき、 ρ_p の分岐具合の不変量を得ると期待される。これは、GL(2)のtriple L-関数に対して、Kudla, Rapoport, Yangの三氏がSteinberg表現の場合に採った方法である。

更に、 ρ_p 自身の表現論的性質から決まる「代数的導手」(保型形式のレベルの局所的な対応物)との比較研究へのアプローチが見込まれる。群がSL(2), U(2)の場合には、LanskyとRaghuramによる観察がある。

ii) 保型 L-関数の特殊値をゼータ積分を通じて研究する際、局所表現のモデルの中に"特別な関数"を見出すことが、肝要である。GL(2)の場合の Popa, Xue 達の研究では、S-W. Zhang が導入した "Whittaker new form"が、不可欠であった。GSp(4)の場合にもその存在を傍証する Roberts-Schmidt の研究がある。U(3)の場合にも宮内により条件付きではあるが、"new vector"が見付けられている。

4. 研究成果

(1)本研究の目的は、長期的目標「リー群の表現に付随する特殊関数研究及び、そのL-関数への応用」を群が比較的小さいU(3)の場合に具現化することであった。これは、

(Loc)前課題でやり残された場合の「分岐L-因子 $L(s, \rho)$ をattainする"良い"特殊関数の探査」、 L -因子 (s, ρ) と表現 ρ の分岐度合を測る導手 $f(\rho)$ との関係究明」

(Glo)大域ゼータ積分の研究を通じて、「H-周期」とL-特殊値/留数の関係及び、その解析数論への応用

という大域/局所理論の二つから成り、本課題では保型L-関数を表示する積分が"単純"な場合、即ち ρ がgenericな場合に残された細部の補完及び前課題ので得たテストケース $(GL(n;E), GL(n;F))$ 、但し E/F は二次拡大での知見の元々の研究対象 $(U(2,1), U(1,1))$ への移植であった。

(2)2015年度

(i)当該年度は、研究グループ構成員の日程調整その他の都合で、Work Shopの主催は出来なかった。研究連絡は、研究打ち合わせ、研究集会などの折に行った。

(ii)(Glo)について、これまでの知見の適用可能性を探るべく、 $GL(n;Q)$ の保型形式論を見直し、室蘭工大に於いて総合報告した。(Loc)については、殆ど進展がなかった。

(iii)高野は、ペアの役割を取り替えた $(GL(2n;F), GL(n;E))$ に対して、新しい尖点表現の例を見付けた。

(3)2016年度

(i)(Glo)に関連する研究動向として、 $U(n,1)$ に付随する志村多様体のHodge予想への応用

を理解すべく、3月にWS『Hodge conjecture on Unitary Shimura variety and $A_q(\rho)$ 』を組織、開催し、研究グループを含む近接研究者と研究討議を行った。また、二つの講演を行った。

(ii)(Glo)について、元々の $(U(2,1), U(1,1))$ ケースの場合に、L-特殊値の代数性についてそれまでに得られた結果の講演発表を3月末にメリーランド大学に於いて行った。テストケース $(GL(n;E), GL(n;F))$ で得た知見からのフィードバックは得られなかった。(Loc)については、2015年度同様殆ど進展がなかった。

(4)2017年度

(i) $SL(2;Q)$ の二重被覆から、多変数化/多被覆化を探るべく、3月にWS『Automorphic forms/representations on covering groups』を主催し、PurkaitにBaruchとの共同研究結果を解説して貰った。被覆群上の保型形式についての新しい結果について情報収集を行った。

2月のRIMSに於ける年次研究集会に、Maryland大のJ.Adams氏を招聘し被覆群の表現について示唆を受けた。

(ii)(Loc)について、コンパクト部分群列への制限から定まる表現 ρ の不変量と導手 $f(\rho)$ との関係を見ることで、手掛かりを探る方針であったが、表現 ρ について芳しい結果は得られなかった。が、群被覆の分裂に関して副産物を得たので、3月のワークショップに於いて講演報告した。

(iii)安田は、標数 p の大域体に於ける志村多様体のカウンターパートDrinfeld多様体に対して、L-特殊値に関連するコホモロジーに関する結果を深めた。都築は、Zagier型跡公式の一般化とその数論への応用研究を行ない、神戸大学で講演した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計9件)

(1)Yoshi Hiro Ishikawa, Splitting of BD covering on the MP filtration, Workshop 「Automorphic forms/representations on covering groups」, 2018年03月22日, 岡山大学理学部。

(2) 安田正大

Drinfeld modular 多様体上の zeta 元について,
九大数理論話会, 2017 年 6 月 22 日, 九州大学数理解析研究院.

(3) 都築正男

An explicit trace formula of Jacquet Zagier type and its application,
神戸整数論集会 2017(招待講演), 2017 年 6 月 7 日, 神戸大学理学部.

(4) Yoshi Hiro Ishikawa,

On rationality of critical L values for $U(3)$,
Algebra Number Theory Seminar(招待講演),
2017 年 03 月 27 日, The University of Maryland, College Park, U.S.A..

(5) 石川佳弘,

Special (g, K) cocycles of Kudla Millson,
Work Shop 「Hodge conj. on Unitary Shimura var. and $A_q(\)$ 」, 2017 年 03 月 14 日, 岡山大学理学部.

(6) 石川佳弘,

Main results and background; Hodge Conjecture, Unitary Shimura variety,
Work Shop 「Hodge conj. on Unitary Shimura var. and $A_q(\)$ 」, 2017 年 03 月 13 日, 岡山大学理学部.

(7) Seidai Yasuda,

Etale theta functions, mono theta environments, and [IUTchI] I, II,
Inter universal Teichmuller Theory Summit 2016(招待講演), 2016 年 07 月 19 日, 京都大学数理解析研究所

(8) 石川佳弘,

$GL(n; \mathbb{Q})$ の保型形式,
室蘭整数論セミナー(招待講演), 2016 年 03 月 26 日, 27 日, 室蘭工業大学.

(9) 高野啓児,

相对尖点表現の例: $GL(2n, F)/GL(n, E)$,
第 3 回香川セミナー, 2015 年 10 月 17 日, 香川大学教育学部.

(2) 研究分担者

都築 正男 (TSUZUKI MASAO)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号: 80296946

安田 正大 (YASUDA SEIDAI)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号: 90346065

高野 啓児 (TAKANO KEIJI)

香川大学・教育学部・准教授

研究者番号: 40332043

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石川 佳弘 (ISHIKAWA YOSHI-HIRO)

岡山大学・自然科学研究科・助教

研究者番号: 50294400