

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 1 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04785

研究課題名(和文)ゼータ正規化積の視点から見たグラフ上の調和解析とその極限操作

研究課題名(英文) Harmonic analysis on graphs and its limit laws from the viewpoint of zeta regularized products

研究代表者

山崎 義徳 (Yamasaki, Yoshinori)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・准教授

研究者番号：00533035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：グラフに対するラプラシアン行列式は、ゼータ正規化積の重要な例である。本研究では、Chinta-Jorgenson-Karlsson らによって導入された調和解析的手法を用いて、ラプラシアンの行列式を研究した。例えば、この手法を用いて離散トーラスに対する素測地線定理の精密化を得ることに成功した。また、関連して Ramanujan グラフの研究も行った。具体的には、一般四元数群に対する Cayley グラフの中で、完全グラフに近い Ramanujan グラフがどれだけあるかという問題と、Hardy-Littlewood 予想と呼ばれる解析数論の問題が関係することを示した。

研究成果の概要(英文)：The determinant of the graph Laplacian is an important example of the zeta regularized products. In this research, we study the determinants for various graphs via a harmonic analytical method established by Chinta, Jorgenson and Karlsson in 2010. Note that, in the method, the heat kernel on graphs plays a crucial role. For example, we obtain a refinement of the prime geodesic theorem for discrete tori, which is not of the form of an asymptotic formula. In this context, we also study Ramanujan graphs, whose associated Ihara zeta function satisfies the “Riemann hypothesis”. We show that the problem finding Ramanujan graphs around the complete graph in a family of Cayley graphs of generalized quaternion group is related to the classical Hardy-Littlewood conjecture for primes represented by a quadratic polynomial.

研究分野：数論

キーワード：ゼータ関数 ゼータ正規化積 ラプラシアンの行列式

1. 研究開始当初の背景

ゼータ正規化積とは、ゼータ関数の 0 での微分を用いて定義される解析的な量である。本来それは、数列の無限積の発散を正規化すべく導入されたものであったが、幾何学における解析的挾率の研究や、数理物理における超弦理論との関係など、現在数理科学の様々な分野においてその重要性が認識されている。

グラフ理論においても、ゼータ正規化積が果たす役割は大きい。ここではその例として、Chinta-Jorgenson-Karlssoon (以下 CJK と略する) らによる離散トーラスの研究を紹介する。彼らは、熱核の理論を用いて離散トーラスに対するラプラシアン行列式 (すなわちラプラシアン固有値に関するゼータ正規化積) とその極限とみなせる実トーラスに対するラプラシアン行列式を結びつける画期的な漸近公式を導いた。熱核を用いたこの調和解析的手法はこれまでにない新しいものであり、これはグラフの情報を得る新しいアプローチとして知られることとなった。

一方で、ラプラシアン行列式はグラフの効率性をも記述する。ラプラシアン行列式は、伊原の公式を介して本質的にグラフの Ihara ゼータ関数と理解することができる。この Ihara ゼータ関数が “Riemann 予想” を満たすグラフを Ramanujan グラフという。この状況はグラフをネットワークと見たときに非常に効率が良いものであるということ意味しており、応用の観点からもこのようなグラフは重要である。しかし、ラプラシアンの固有値を評価することは一般に難しいため、そのようなグラフを得ることも難しい、というのが現状である。

2. 研究の目的

本研究ではラプラシアンの行列式を中心に、グラフおよびその極限とみなせる多様体の相互的な研究を行う。

まず CJK らによる熱核を用いた離散トーラスの研究を、より一般のグラフに対しても適用できるよう議論の再整備・再整理を行う。彼らの手法は画期的でありかつ萌芽的でもあるので、ここで十分理論を確立し、最終的に一般のグラフに対して適用可能なものになるようにすることが目標である。また、適宜極限操作を行うことで、極限として出てくる多様体の幾何学的な性質も調べる。

一方で、本研究では並行して Ramanujan グラフの研究も行う。ここでは特に、自明な Ramanujan グラフである完全グラフから辺を間引いてどこまで Ramanujan グラフであり続けるか、という極めて自然な問題について考察する。この研究は、将来的に与えられた Ramanujan グラフの近くにどれくらい Ramanujan グラフがあるか、というある種の分布問題を研究するための第一歩であるとも言える。

3. 研究の方法

上記を踏まえ、本研究では以下の 2 つの具体的な問題に取り組む。

(1) 離散トーラスに対する素測地線定理:

グラフの Ihara ゼータ関数を原点の周りで Taylor 展開すると、その展開係数にはグラフ上の素測地線の個数が現れる。これより Ihara ゼータ関数を研究することで、素測地線定理、すなわち素測地線の個数の長さに関する漸近公式を得ることができる。先述したように、CJK 理論はグラフに対する非常に精密な情報を与える。これを踏まえれば、CJK 理論を用いることで、離散トーラスに対する剰余項の記述も含めた精密な素測地線定理を得ることができると期待できる。そこでこれを実行する。その後、一般のグラフに対しても適用できるよう議論を整理し、構造が単純なグラフに実際に適用して同様の素測地線定理を導出する。

(2) Ramanujan グラフの辺間引き問題:

Ramanujan グラフに対する上記辺間引き問題だが、グラフが巡回グラフや二面体グラフ、すなわち巡回群や二面体群に対する Cayley グラフの場合、この問題が Hardy-Littlewood 予想という解析数論における古典的かつ重要な問題と結びつくことが分かった (愛媛大学の平野幹氏、堅田晃平氏との共同研究)。そこでグラフのクラスをもっと一般に広げて同様の問題を考え、付随してどのような数論的問題が出てくるかを調べる。また、Cayley グラフの場合、ラプラシアンの固有値は対応する群の表現論を用いて記述されるため、この辺間引き問題を表現論の言葉で定式化し、議論をより見通しの良いものにする。また数値実験を行い、考えているクラスのグラフの中にどれくらい Ramanujan グラフがあるか、その分布についても調べる。

4. 研究成果

(1) について:

CJK 理論を用いることで、離散トーラスに対する素測地線の個数の漸近ではない明示公式を導くことに成功した。これは「Lauricella の多変数超幾何多項式 (Jacobi 多項式のある一般化) の有限和」という形をしており、辺隣接行列の固有値を使った既存の素測地線定理とは異なり、いつでも計算が可能である。また、この各々の多項式がある特別な素測地線を数えていることも確認できた。これは丁度、多様体の場合の「ホモロジー類を指定した素測地線定理」のグラフ版と見なすことができる。結果は論文にまとめて投稿し、すでに出版済みである (論文)。

離散トーラスの場合、解析に必要なのは整数全体のなす無限群 Z 上の熱核の情報である。そこで、一般論の構築のため、 Z を他の無限群に取り換えてそれ上の熱核についても研究した。具体的には、Hecke 群 (巡回

群の自由積で与えられる群) と呼ばれる無限群に対する Cayley グラフ上の熱核に対して、それが満たす微分・差分方程式を明示的に書き下し、そこからわかる対称性などについて調べた。Hecke 群は特別な場合に modular 群を含んでいるので、これは数論的な応用も期待できる。以上はニューヨーク市立大学シティカレッジの Gautam Chinta 氏との共同研究であり、現在も継続して研究中である。

(2) について:

Ramanujan グラフに対する辺間引き問題を、巡回群、二面体群の次に表現論が簡単だと考えられる一般四元数群の場合に考察し、この場合も同様に問題の解決には Hardy-Littlewood 予想が関係することを明らかにした。もっと一般に、既約表現が 2 次以下のものしか出てこないような群に対しては同様の結果が期待できるが、これについては今後の課題とする。結果は論文にまとめて投稿し、すでに出版済みである (論文)。その他:

また、本研究期間中に Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の組合せ論的一般化である Schur 多重ゼータ関数というものを導入し、それについても研究を行った。上智大学の中筋麻貴氏、チュラーロンコーン大学の Quamporn Phuksuwan 氏とは、Jacobi-Trudi 公式や Giambelli 公式など Schur 関数に由来する関係式について研究した。また、名古屋大学の Henrik Bachmann 氏とは、いわゆる 1-3 公式について研究し、それをを用いて正の奇数点における Riemann ゼータ値の新しい級数表示を与えた。結果は論文にまとめて投稿し、後者については出版が決定している (論文)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Henrik Bachmann and Yoshinori Yamasaki, Checkerboard style Schur multiple zeta values and odd single zeta values, to appear in *Mathematische Zeitschrift*, 2018. (査読有)

doi: 10.1007/s00209-018-2058-5.

Yoshinori Yamasaki, An explicit prime geodesic theorem for discrete tori and the hypergeometric functions, to appear in *Mathematische Zeitschrift*, 2018. (査読有)

doi: 10.1007/s00209-017-1955-3.

Yoshinori Yamasaki, Ramanujan Cayley graphs of the generalized quaternion groups and the Hardy-Littlewood conjecture, *Mathematical Modelling for Next-Generation Cryptography*,

Mathematics for Industry, 29 (2018), 159 -- 175. (査読有)

doi: 10.1007/978-981-10-5065-7_9.

Miki Hirano, Kohei Katata and Yoshinori Yamasaki, Ramanujan Cayley graphs of Frobenius groups, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 94 (2016) No. 3, 373 -- 383. (査読有)

doi: 10.1017/S0004972716000587.

[学会発表](計 15 件)

山崎 義徳, Schur 多重ゼータ関数とその 1-3 公式について, 2018 早稲田整数論研究集会, 早稲田大学, 2018 年 3 月 14 日.

山崎 義徳, Schur 多重ゼータ関数について, 熊本大学群論・組合せ論・表現論セミナー, 熊本大学, 2017 年 12 月 12 日.

山崎 義徳, Checkerboard style Schur multiple zeta values, *Zeta Functions in OKINAWA 2017*, 沖縄コンベンションセンター, 2017 年 11 月 22 日.

山崎 義徳, Schur 多重ゼータ関数について, 解析的整数論とその周辺, 京都大学, 2017 年 10 月 30 日.

山崎 義徳, 多重ゼータ関数の拡張について - 対称関数の視点から -, 表現論と組合せ論, 京都大学, 2017 年 10 月 13 日.

Yoshinori Yamasaki, Non-commutative matrix forests theorem, *Oberseminar Analysis und Zahlentheorie*, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Germany, July 11, 2017.

山崎 義徳, 離散トーラスにおける素測地線定理と超幾何関数, 多重ゼータ値の諸相, 京都大学, 2016 年 7 月 13 日.

山崎 義徳, 離散トーラスにおける素測地線定理と超幾何関数, 数論幾何・超幾何 研究交流会, 北海道大学, 2016 年 3 月 9 日.

山崎 義徳, 離散トーラスにおける素測地線定理と超幾何関数, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科解析数論セミナー, 名古屋大学, 2015 年 12 月 25 日.

山崎 義徳, 離散トーラスにおける素測地線定理と超幾何関数, 琉球大学理学部数理科学科談話会, 琉球大学, 2015 年 11 月 26 日.

Yoshinori Yamasaki, Ramanujan Cayley graphs and the Hardy-Littlewood conjecture, *Zeta Functions of Several Variables and Applications*, Nagoya University, Japan, November 9, 2015.

山崎 義徳, 一般四元数群の Ramanujan Cayley グラフについて, *Zeta Functions in OKINAWA 2015*, 沖縄コンベンションセンター, 2015 年 10 月 12

日.

山崎 義徳, 離散トラスにおける素測地線定理と超幾何関数, 広島幾何学研究集会 2015, 広島大学, 2015年10月7日.

山崎 義徳, 一般四元数群の Ramanujan Cayley グラフについて, 表現論がつなぐ数学 2015, JR 九州ホテル鹿児島, 2015年9月18日.

Yoshinori Yamasaki, Ramanujan Cayley graphs and the Hardy-Littlewood conjecture, Group actions and metric embeddings, Kyoto University, Japan, September 8, 2015.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 義徳 (YAMASAKI YOSHINORI)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号: 00533035

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし