

令和元年5月30日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04787

研究課題名(和文) 正標数体上の志村多様体の幾何学とガロア表現の深化

研究課題名(英文) The geometry of Shimura varieties over positive characteristic and the development of Galois representations

研究代表者

山内 卓也 (Yamauchi, Takuya)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90432707

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：当該研究期間に実施した研究はセール重さの解析であった。セール重さは法 p ガロア表現の保型性問題を定式化するためには必要な概念であり、予想として対応する保型形式の重さの可能性を特定するものである。本研究ではセール重さを解析する道具の1つとしてテータ作用素を導入し代数群が GSp_4 の場合にはテータ作用素の具体的表示を与えることに成功し、それと保型性持ち上げ定理と GSp_4 の保型表現の性質を用いてかなり一般の場合のセールの重さ定理を総実代数体上の GSp_4 に対して証明し、さらに与えられた法 p ガロア表現の局所的性質から具体的に対応する保型形式の重さのリストを与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型性問題とは幾何的ガロア表現と保型表現という代数的対象と解析的对象の間にある種々の関係を問う問題である。 GL_2 の場合にはWilesが楕円曲線に付随するガロア表現に対して保型性問題を解決したが、その応用として350年も未解決であったフェルマー予想が解決された。またそれと同時に周辺分野の大きな発展をもたらした。今回の研究も目標は保型性問題の解決のための基礎を進展させることに主眼が置かれ、特に正標数体上での志村多様体上の幾何を用いて法 p 保型形式の性質(テータ作用や重さの還元)に関する当該研究者の成果はセール重さを調べることには必要不可欠な道具であると期待する。

研究成果の概要(英文)：The study conducted during the project was analysis of Serre weight. The Serre weight is a concept necessary to formulate modularity problem of the residual Galois representation, and specifies the possibility of the weights of the corresponding automorphic forms. In this research, we introduce the theta operators as one of the tools to analyze the Serre weight, and when the algebraic group is GSp_4 , we succeeded in giving a concrete expression of the theta operators. We use the modular lifting theorems to prove the Serre weight theorem in a fairly general case for GSp_4 over totally real fields, and further a list of the possible Serre weight of corresponding automorphic forms was described completely in terms of the local properties of a given mod p Galois representation.

研究分野：整数論

キーワード：ガロア表現 法 p ガロア表現 セール予想 保型性問題 テータ作用素 ジーゲル保型形式 楕円保型形式

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

p 進ガロア表現から還元という手続きを経て法 p ガロア表現という有限体上定義されたガロア表現が得られる。一方、代数的な保型形式はそれが定義されている代数多様体が整数環上定義されているときやはり還元という操作で法 p 保型形式を定義することができる。 p 進ガロア表現と保型形式との対応を問うのが保型性問題であり、法 p ガロア表現と法 p 保型形式の対応を問うのがセール予想である。保型性問題はセール予想を仮定すれば保型性持ち上げ定理を用いて十分多くの p 進ガロア表現に対して証明されているためセール予想の解決が急がれる状況である。このセール予想を解決すべく先ず予想定式化を精密にするために法 p 保型形式が持つ重さの可能性を調べ上げることが重要であった。本研究では志村多様体の幾何を用いて主に GSp_4 の場合に限定してセール重さを解析することに主眼が当てられた。

2. 研究の目的

背景にも書いた通り本研究の目的は法 p ガロア表現と法 p 保型形式の対応を問うセール予想を証明するために、両者の間に存在する重さの概念の間の対応を明示的に定式化し証明することであった。

3. 研究の方法

法 p 保型形式の解析にはそれが定義されている有限体上の志村多様体の幾何が援用できる。これを用いて種々のテータ作用素が定義される。これは重さを変える操作でありこの重さを変える操作を繰り返して最適な重さを見つけるというテータサイクルの理論を確立した。また、保型表現論を用いて、コンパクト形式上の法 p 保型形式の話に問題をシフトすることで既存の保型性持ち上げ定理を改良し、重さ還元定理の証明に援用した。上記とガロアコホモロジーの詳細な計算により、対応する法 p 保型形式がもつべき重さの解析とその対応の証明を行い、テータサイクルを用いて重さの具体的な対応を与える。

4. 研究成果

テータ作用素の構成については一般的なレシピを与えそれを GSp_4 の場合に実行し、3つの明示的な作用素を得た。またこれらのテータサイクルを調べ重さの変動を調べた。一番の大きな進展はセール予想の証明に必要な不可欠な保型性持ち上げ定理の改良である。従来は法 p ガロア表現の保型的なリフトの局所表現に「潜在的対角化可能である」という条件が課されていたが GSp_4 の場合にこれをは外すことに成功し、かなり一般の法 p ガロア表現の重さ還元定理がこの定理で調べることが可能になり先のテータサイクルと合わせて、予想として対応すべき重さのリストの完全な記述を与えられた法 p ガロア表現の局所的性質から完全に記述することに成功した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9 件)

Sairaiii, Fumio; Yamauchi, Takuya; On the class numbers of the fields of the pn -torsion points of certain elliptic curves over \mathbb{Q} . J. Number Theory 156 (2015), 277-289.

Kim, Henry H.; Yamauchi, Takuya; Cusp forms on the exceptional group of type E_7 . Compos. Math. 152 (2016), no. 2, 223-254.

Henry H Kim and Takuya Yamauchi. A conditional construction of Artin representations for real analytic Siegel cusp forms of weight $(2; 1)$, Contemporary Mathematics , (2015).

Henry H Kim and Takuya Yamauchi, A uniform structure on subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ and its application to a conditional construction of Artin representations of GL_n , Journal of the Ramanujan Mathematical Society Volume 32, Issue 1, March 2017 pp. 75-99.

Bert van Geemen and Takuya Yamauchi, On Intermediate Jacobians of Cubic Threefolds Admitting an Automorphism of Order Five
, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Volume 12, Number 1, 141-164, 2016

Henry H. Kim, S. Wakatsuki and T. Yamauchi, An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4
and its applications, <https://doi.org/10.1017/S147474801800004X> Published online: 22 February 2018

Henry H. Kim and T. Yamauchi, A Miyawaki type lift for $\mathrm{GSpin}(2,10)$, Math zeitschrift, Volume 288, Issue 1–2, pp 415–437

Lubjana BeshajTakuya Yamauchi, On Prym varieties for the coverings of some singular plane curves, manuscripta mathematica
, Volume 158, Issue 1–2, pp 205–222

F.Sairaiji and T. Yamauchi, On the class numbers of the fields of the p -torsion points of elliptic curves over \mathbb{Q} Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 30 (2018), 893–915

[学会発表] (計 12 件)

近畿大学数学講演会における口頭発表 於 近畿大学日 時: 平成 27 年 5 月 14 日
演 題法 p テータ作用素について

早稲田整数論セミナーにおける口頭発表 於 日 時: 平成 27 年 6 月 19 日
演 題位数 5 の自己同型をもつ smooth cubic 3-fold の中間ヤコビ多様体について

松江セミナーにおける口頭発表 於 島根大学日 時: 平成 27 年 6 月 22 日
演 題 Artin 表現に付随する保型表現について.

大阪大学整数論および保型形式セミナーにおける口頭発表
於 大阪大学日 時: 平成 27 年 7 月 24 日
演 題 rank 3 の例外群 $E7$ に関する Ikeda type lift と Miyawaki type lift について

金沢大学数理学談話会における口頭発表
於 日 時: 平成 27 年 8 月 5 日
演 題保型形式に付随するモチーフ

日韓整数論セミナーにおける口頭発表
於 POSTECH (浦項工科大学) 日 時: 平成 28 年 2 月 4 日
演 題: The weight reduction theorem of Serre conjecture for GSp_4

東北大学整数論セミナーにおける口頭発表
於 東北大学 日 時: 平成 28 年 4 月 11 日
演 題: モチーフ、ガロア表現、そして、保型表現

東北大学談話器における口頭発表
於 東北大学 日 時: 平成 28 年 5 月 23 日
演 題: Arthur-Selberg trace formula とその応用

日本数学会における口頭発表（特別講演）
於 東北大学 日 時: 平成 28 年 9 月 17 日
演 題: GSp_4 に関するセール予想と重さ還元定理

マンハイム大(ドイツ)における整数論セミナーでの招待講演
2018 年 9 月 5 日, 13:30-15:00, 演題 On theta operators.

京都大学第談話会 宮脇型リフトの非消滅性について
2019/01/30 Wed 14:45 - 15:45 山内卓也

NSU (National Singapore university) における招待講演 2019/2/11 On Ikeda type and Miyawaki type construction of holomorphic cusp forms on Hermitian symmetric domains, Takuya Yamauchi

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：千田雅隆, 宮内通孝

ローマ字氏名：Chida Masataka, Miyauchi Michitaka

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。