様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １７ 日現在

機関番号：２４４０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４７８９

研究課題名（和文）代数群のmodular表現

研究課題名（英文）Modular representations of algebraic groups

研究代表者
兼田　正治（KANEDA, masaharu）

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：６０２０４５７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：阿部紀之との共同研究で，reductive group GのFrobenius kernel G_1とGのmaximal torus
Tについて，singular highest weightのG_1T-Verma moduleの構造を解明した。Grassmannian Gr(2,n)と，GがG_2型でPが極大parabolic部分群の時のG/Pの，構造層のFrobenius direct imageについて，我々の予想が成立することを示した。Michel Grosとの共同研究により，Frobenius contractionのDonkinによる新たな特徴付けについて詳述した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
上記中，GがG_2型でPのLevi部分群がGのshort simple rootを持つときには，G/Pの構造層のFrobenius direct imageは，我々の予想通りKaroubian complete strongly exceptional posetを持つだけで無く，余分な直既約成分を持ち，そのself-extensionは消えないことを発見した。新たなFrobenius contractionの特徴付けにより，Frobenius contractionがinjectivityやgood filtrationの存在を保つことが分かる。

研究成果の概要（英文）：Let G denote a reductive algebraic group split over a field of characteristic p>0. In joint work with Abe noriyuki we determined for p>>0 the Loewy structure of the G_1T-Verma modules of singular highest weights, G_1 the Frobenius kernel of G and T a maximal torus of G. On the Grassmannian Gr(2,5) and on G/P with G in type G_2 and P a maximal parabolic subgroup of G we verified for p>>0 our conjecture that the the Frobenius direct image of the structure sheaf of G/P contains a Karoubian complete strongly exceptional poset of coherent sheaves. In type G_2 we also found that the Frobenius direct image has a nonzero self-extension, implying that the sheaf of rings of small differential operator on G/P has a non-vanishing 1st cohomology. In joint work with Michel Gros we described a new characterization, thanks to Donkin, of the Frobenius contraction, showing in particular that the Frobenius contraction preserves injectivity and the existence of a good filtration.

研究分野：代数学

キーワード：algebraic groups　Frobenius morphism　representation theory

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

Homogeneous projective variety は reductive group G とその parabolic 部分群を用いて G/P と表される。正標数 p における G/P の構造層の Frobenius direct image は，G/P が整数環上定義されている為，標数を問わず G/P 上の幾何学について多くの情報を持つことが知られている。例えば，Mehta と Ramanathan [Mehta, V.B. and Ramanathan, A., Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, Ann. Math. 122 (1985), 27—40]による Frobenius splitting は，　標数に拘わらず Schubert varieties の normality を与え，この方法については，Brion と Kumar による 解説本[Brion, M. and Kumar, S., Frobenius splitting Methods in Geometry and Representation Theory, PM 231, Boston etc. 2005 Birkauser]まで出版されている。統括者の研究に関しては，先に Ye Jiachen との共同研究 [Kaneda and Ye, J-C, Some observations on Karoubian complete strongly exceptional posets on the projective homogeneous varieties, arXiv:0911.2568] により発見された例では，G/P の構造層の Frobenius direct image 中に，G と P の Weyl 群によって parametrize された Karoubian complete strongly exceptional poset が存在する。従って，それら G/P 上に tilting sheaf が構成され，G/P 上の coherent sheaves の bounded derived category とその tilting sheaf の endomorphism ring 上の有限次元加群の bounded derived category が，　Beilinson の lemma により同値になる。

この現象は, その後 quadrics 上でも確認された[Kaneda, Exceptional collections of sheaves on quadrics in positive characteristic, Sao Paulo J. of Math. Sci. 8　(2014), 117-156]が，一般には依然不明であった。

他方，Michel Gros との共同研究で統括者が発見した G の algebra of distributions 上の Frobenius splitting は, G の表現上に新たな操作 Frobenius contraction を定義する [Gros, M. and Kaneda, Contraction par Frobenius de G-modules, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 61, 6 (2011) 2507-2542]し，その量子化版もあった[Gros, M. and Kaneda, Un scindage du morphisme de Frobenius quantique, Ark. Mat. 53, No. 2 (2015), 271-301] が，その性質についての詳細は依然謎であった。

最後に, G の表現論の中心課題である既約指標の決定に関して, 近年 G の affine flag varieties や affine Grassmannian 上の constructible sheaves について進展があり, Geordie Williamson は長年信じられてきた Lusztig 予想に反例を与えた [Williamson, G., Schubert calculus and torsion explosion, J. of AMS 30　(2017), 1023-1046]。　即ち，標数 p が G の Coxeter 数以上であれば，G の既約指標は G の affine Weyl 群の量子化である岩堀-Hecke 環上の Kazhdan-Lusztig 多項式で記述できると言うのが Lusztig の予想であり，p が十分大きい時にはその予想が成立することが分かっていたが，Coxeter 数以上ではあるがそれ程小さくもない p について Williamson が反例を与え，G の表現論は新たな局面を迎えていた。

２．研究の目的

上記，G/P の構造層の Frobenius direct image について，我々の予想に基づいて継続して調べる。Frobenius contraction について，その性質を明らかにする。Reductive 群 G の既約指標について，新たな展開を学び自身の何らかの寄与を図る。

３．研究の方法

上記，G/P の構造層の Frobenius direct image については，従来の我々の方法である G の Frobenius kernel G_1 を用いて G_1P-Verma modules の構造を表現論を用いて調べる Frobenius contraction については, Gros との共同研究を継続する。G の既約指標についても, 本邦には斯界の専門家が僅少なため，海外の専門家との交流が肝心になる。

４．研究成果

先ず，G/P の構造層の Frobenius direct image については，T を P の maximal torus として, G_1P-Verma 加群の G_1T 構造を基に予想をたてているのであるが, 一般にその highest weight が regular の時は，先に，阿部紀之との共同研究 ［Abe, N. and Kaneda, M. , Loewy series of parabolically induced G_1T-Verma modules, J. of Institute of Math. Jussieu 14-1 (2015), 185-220] により，上記 Lusztig 予想成立の場合には，よく分かっていた。それを，highest weight が singular の場合にも解明したのが, 下記④である。Singular highest weight の G_1T-Verma 加群も，regular の時と同様に，rigid であり，その Loewy series は periodic Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて記述される。これ結果により，G_1T-Verma 加群の構造は, Lusztig 予想成立の下では，よく分かったことになる。証明には，Simon Riche の G_1-block algebras の Koszulity [Riche, S., Koszul duality and modular representations of semisimple Lie algebras, Duke Math. J. 154 (2010), 31-134] を用いる。

以下，W を G の，W_P を　P の Weyl 群とし，W^P を W/W_P の最短代表系の全体を，\ell で W 上の長さの関数，w^P でその最長元を表すことにする。V で 0 を highest weight にもつ P から G_1P へ誘導された G_1P-Verma 加群とすると，G/P の構造層の Frobenius direct image F_*O_{G/P}は V の層化になっている。V を G_1T 加群とみたときの Loewy length は(w^P の長さ)+1 で, W^P の各元 w について, w\bullet0=w\rho-\rho, \rho は正の roots 全体の和の半分, を highest weight とする G_1 既約表現 L(w)は，(w の長さ)+1 番目の G_1T-socle series に出てくる。そこでの L(w)の重複度空間 soc_w^1 は，P 加群の構造を持ち，w^{-1}\bullet(w\bulle0)^1 を weight にもつ。ここで(w\bulle0)^1 は，w\bulle0 の p 進展開の 1-part。今まで我々が知っていた例では，p が十分大きいとき，(w\bulle0)^1 によって P 上生成された soc_w^1 の subquotient の層化 E_w が，G/P 上の Karoubian complete strongly exceptional poset を成し，更に，　E_x から E_y への成す空間が 0 になるのは，Chevalley-Bruhat order が x\leq y の時に限る。更に，V の G_1-composition factors はすべて L(w)の形をしておりそれらの重複度空間は層化により split し，F_*O_{G/P}の直和分解を与える。③では，Grassmannian G(2,n)において，我々の予想がここでも成立することを得た。各 E_w の構成には，w^{-1}\bullet(w\bulle0)^1 が生成する既約 P 加群を用いる。証明には，Kuznetzov による Koszul 型の complex が計算を容易にする。これらはすべて整数環上定義され，　標数 0 上でも Karoubian complete strongly exceptional poset を成すことが分かるが，Kapranov が標数 0 上で構成したもの [Kapranov, M. M., The derived category of coherent sheaves on Grassmannians, Funct. Anal. i Prilozhen, 17 (1983), 78-79] とは異なる。

②では，G が G_2 型で，P の Levi subgroup が G の short simple root を持つときに，p が 11 以上で，highest weight 0 の G_1T-Verma 加群，上記 V の Loewy structure の P 構造を決定した。それにより，F_*O_{G/P}の直既約分解が分かり，予想通りの Karoubian complete strongly exceptional poset を得た。各 E_w は soc_w^1 全体により構成する。それら P 加群のすべてが，上記所定の highest weight で生成されるわけではなく，その内の１つは，異なる weight により生成される。更には，P の Lie 環を捻ったものを層化したものが，F_*O_{G/P}の直既約因子として現れ，その self-extension が消えない。従って，F_*O_{G/P}自身の self-extension も消えず F_*O_{G/P}自身は tilting ではないことを示す。これにより，当該 G/P 上の small differential operator 環の層の 1st cohomology が消えないことが分かり，　柏原と Lauritzen による Gr(2,5)における differential operator 環の層の higher cohomology が消えないことの類似を明示的に与える。これにより，P が Borel 部分群で無いときの G_2 型の G について，F_*O_{G/P}
の直既約分解は分かった。今後，P が Borel 部分群の時の状況の解明が待たれる。

以下の①は，統括者が当該科研費を使って Mittag-Leffler 研究所を訪れたときに　Stephen Donkin に教えて貰った Frobenius contraction の Steinberg module を用いた表示について記述したものである。我々の元の定義は，G の algebra of distributions Dist(G)上の Frobenius morphism の splitting を構成するのに使う Dist(T_1)の idempotent を用いて，G の表現にその idempotent を作用させる射影による。T_1 は T の Frobenius kernel。新たな特徴付けは，
G の表現に２回の Steinberg module との tensor product を施した後，その G_1-invariants を Frobenius untwist したものである。これにより，Frobenius contraction が good filtration や injectivity を保つことが分かる。一方，既約性は崩れることがある。この結果は，Henning Andersen による，　simply connected semisimple group G について，その表現全体のなす圏が，拡張された Steinberg block と圏同値であることの証明に繋がった [Andersen, H.H., The Steinberg linkage class for a reductive algebraic group , Ark. Math. 56 (2018), 229-241]。一方，上記 Dist(G)上の Frobenius
Splitting の存在証明は，G が simply connected semisimple のときに与えたもので
一般の reductive group の場合への拡張は自明というわけでは無いことに，当該科研費を使っての Atlantic Algebra Center での講演を切っ掛けにして，気付き，それについても Gros との共同研究を継続している。上記の結果は，Steinberg module が存在しないときにも適応出来るようである。

最後に，G の既約指標に関する Lusztig 予想について，最近，Riche と Williamson によって G が一般線形群 GL_n の場合に新たな進展があった。以下，p＞n とする。彼らは，GL_n の principal block に岩堀-Hecke algebra の categorification である Elias-Williamson diagrammatic category が wall-crossing functors によって作用することを示し，それを使って，G の indecomposable
tilting modules の指標を Kazhdan-Lusztig
多項式に代わる p-Kazhdan-Lusztig 多項式によって与えた [Riche, S. and Williamson, G., Tilting Modules and the p-Canonical Basis, Asterisque 397, 2018SMF]。同様の方法によって，統括者は当該科研費を使っての Max Planck Institute を訪問中に，G_1T についてもその principal block に Elias-Williamson category が作用することを得ており，periodic p-Kazhdan-Lusztic 多項式の導入等，今後の進展が期待される。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Gros, M. and Kaneda, M. , Contraction par Frobenius et modules de Steinberg, 査読有 Ark. Mat. 56 (2018), 319-332

② Kaneda, M. , On the Frobenius direct image of the structure sheaf of a homogeneous projective variety, 査読有 J. Alg. 512 (2018), 160-188

③ Kaneda, M. , Another strongly exceptional collection of coherent sheaves on a Grassmannian, 査読有 J. Algebra 473 (2017) 352-373
④ Abe, N. and Kaneda, M., The Loewy structure of G_1T-Verma modules of singular highest weights, 査読有 JIM Jussieux, 16 (2017), 887 - 898

〔学会発表〕（計７件）
① Kaneda, M., Exceptional sequences in positive characteristic, 大阪市立大学最終講義, 2019/3/15
② Kaneda, M., Frobenius contraction,大阪表現論 seminar, 2019/3/4
③ Kaneda, M., Splitting of the Frobenius morphism,富山大学数学教室談話会,2019/2/19
④ Kaneda, M., Williamson's construction of torsion in the intersection cohomology of Schubert varieties, Toric Topology 2017 in Osaka/大阪市立大学代数 seminar, 2017/12/14
⑤ Kaneda, M., Frobenius contraction, a new operation on the rational modules for reductive algebraic groups in positive characteristic, Aug. 28, 2017, Atlantic Algebra Center, Canada
⑥ Kaneda, M., Frobenius contraction, as Donkin puts it, Aug. 16, 2016, Bernoulli Center EPFL, Confederation Helvetique
⑦ Kaneda, M., Other aspects of Frobenius splitting, seminar in the program Representation Theory, May 13, 2015, Mittag-Leffler Institute, Djursholm, Sweden

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
研究協力者氏名：谷崎　俊之
ローマ字氏名：(TANISAKI TOSHIYUKI)

研究協力者氏名：柳田　伸顕
ローマ字氏名：(YAGITA NOBUAKI)

研究協力者氏名：手塚　康誠
ローマ字氏名：(TEZUKA MICHISHIGE)

研究協力者氏名：古澤　昌秋
ローマ字氏名：(FURUSAWA MASAAKI)

研究協力者氏名：木村 嘉之
ローマ字氏名：(KIMURA YOSHIYUKI)

研究協力者氏名：河田　成人
ローマ字氏名：(KAWATA SHIGETO)