様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　2 年　6 月　2 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ０４７９２

研究課題名（和文）非アルキメデス付値体における完全代数的独立性

研究課題名（英文）Perfect algebraic independence properties over non-Archimedean valuation fields

研究代表者
田中　孝明（Tanaka, Taka-aki）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：６０３０６８５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では完全代数的独立性および微分完全代数的独立性という著しい性質を有する関数を、代表的な非アルキメデス付値体の上で構成した。初年度には、実数であると同時に有限個の素数pに対するp進数でもあり、有理数体上で代数的独立となる無限集合の実例を得た。その後、完全代数的独立性の拡張概念を得てp進数体において完全代数的独立性を有する関数を構成する基盤を築いた。また、正標数の関数体上で微分完全代数的独立性を有する関数を、多変数Mahler関数を用いて構成した。最終年度には、微分完全代数的独立性を有する関数を応用し超越性・代数的独立性を行列環上に拡張する新たな概念を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
超越数の間の構造を決定することが超越数論の究極の目標であるが、現状ではこの目標は遥か先にある。超越数の構造決定の前段階として、無限集合でその任意の有限部分集合が有理数体上で代数的独立な超越数から成るものの量産が重要である。なぜなら、そのような超越数たちを有理数体に添加して得られる拡大体を最も効率良く最大化できるからである。従って、この目的を単独の関数によって達成できる完全代数的独立性および微分完全代数的独立を有する関数の構成は学術的に意義深い。また、本補助金による社会的貢献の一環として、国際研究集会を主宰し多くの参加者を得て２国間のみならず多国間の国際共同研究の発展に寄与したことが挙げられる。

研究成果の概要（英文）：In this project the research representative constructed certain functions having ultimate algebraic independence properties especially over typical non-Archimedean valuation fields. First, he obtained the infinite algebraically independent sets consisting of numbers which can be regarded both as real and as p-adic for a finite number of primes p. Then he established the base for constructing functions having perfect algebraic independence properties over p-adic number fields. Over function fields of positive characteristic, the research representative constructed, using Mahler functions of several variables, the functions having differential perfect algebraic independence properties. Finally, he extended the concept of transcendence and algebraic independence to matrix rings as applications of the functions having differential perfect algebraic independence properties.

研究分野：数物系科学

キーワード：代数的独立性　Mahler関数　p進数　正標数　超越数

１．研究開始当初の背景

関数の代数的数における値の間に、有理数を係数とする多項式で表される関係式が存在するか否か、即ち有理数体 Q 上で代数的従属か代数的独立かは、超越数論の先行研究における主要なテーマである。本研究では次のような性質をもち、冪級数で表される関数を「完全代数的独立性」を有する関数と呼ぶ。その性質とは、最も広く取った定義域内の相異なる代数的数を代入する毎にことごとく Q 上代数的独立な超越数を返すことである。さらに本研究では、そのような定義域内の相異なる代数的数における値のみならず、それらの代数的数における任意の階数の微分係数をもすべて併せて得られる無限集合が Q 上代数的独立となり、冪級数で表される関数を「微分完全代数的独立性」を有する関数と呼ぶ。完全代数的独立性および微分完全代数的独立性を有する関数は、最も極端な代数的独立性を示す関数である。

上記の２性質を有する関数についての、多数の実例を与えることが近年 明らかとなってきたのが Mahler 関数である（Mahler 関数については下記「研究の方法」欄にて詳述する）。代数的数を成分とする点における Mahler 関数の値の代数的独立性は、Mahler 関数の値を複素数として考えた場合には、先行研究において幅広く扱われている。

一方で数論においては、複素数に対して用いる通常の絶対値とは異なる、素数 p に対する p 進絶対値を考察することも重要である。有理数から成る簡単な形の級数を考えた場合、通常の絶対値と p 進絶対値のどちらか一方に関してのみ収束する場合が多い。通常の絶対値に関して収束する有理数から成る級数の和は実数であり、p 進絶対値に関して収束する有理数から成る級数の和は p 進数である。p 進数体およびその代数閉包の完備化における、超越性・代数的独立性の研究も超越数論の先行研究の主要テーマの一つとなってきた。

また、正標数の関数体は p 進数体と並んで数論を展開する主要な対象である。これに関して Mahler 関数は指数関数や L 関数等と異なる特性を示す。即ち、Mahler 関数は正標数の関数体の上で定義しても、標数 0 の体上で定義した場合に近い形で理論が展開できることが先行研究において示されている。ただし、先行研究の対象は、１変数の Mahler 関数に限られていた。

２．研究の目的

超越数論の研究目的は代数的数を項とする冪級数の和として表される超越数に関する数論的性質、具体的には代数的数により近似される度合いの決定や複数の超越数が Q 上代数的独立となるか否かを決定することである。究極の目標は超越数たちの間の構造を決定する理論の構築である。しかしながら現状ではこの目標は遥か先にある。超越数の構造決定の前段階として、代数的数を項とする冪級数の和から成る無限集合でその任意の有限部分集合が Q 上代数的独立な超越数から成るものの量産が重要である。なぜなら、代数的数を項とする冪級数の和 $\xi_1,.., \xi_n$ が Q 上代数的独立であれば、有理数係数の任意の相異なる非零多項式 $P_i(X_1,.., X_n)$ $(i = 1,.., m)$ に代入するとことごとく（代数的数を項とする冪級数の和として与えられる）相異なる超越数 $P_i(\xi_1,.., \xi_n)$ $(i = 1,.., m)$ を返すことから、解析関数（収束冪級数で表される関数）の代数的数における値を有理数体 Q に添加して得られる拡大体を、最も効率良く最大化できる。

研究代表者は特に、一つの解析関数から最も効率よく代数的独立な値を生み出せる、完全代数的独立性および微分完全代数的独立性を有する関数を重視し、継続的に研究してきた。本研究の目的は、p 進数体および正標数の関数体に代表される非アルキメデス付値体において、後述の Mahler 関数を用いて 完全代数的独立性および微分完全代数的独立性を有する関数を構成することである。

３．研究の方法

代数的独立性の主たる証明方法のひとつに、値の代数的独立性と値を与える解析関数の代数的独立性を別々に証明する２段階方式がある。即ち ２段階方式では、有理関数体上で代数的独立であることが分かっている解析関数たちの代数的数における値の Q 上での代数的独立性を示す定理（**値の独立性判定定理**と呼ぶ）と、問題となっている解析関数たち自身が有理関数体上で代数的独立であることを示す定理（**関数自身の独立性判定定理**と呼ぶ）を別々の方法で証明する。本研究では両方の独立性判定定理を、問題で扱う解析関数およびそれをどのような体の上で定義するかに応じて新たに確立する必要がある。

２段階方式の中でも Mahler の方法は特に強力である。Mahler の方法とは多変数 $z_1,.., z_n$ の関数 $f_1(z_1,.., z_n)$,.., $f_r(z_1,.., z_n)$ の代数点（成分がいずれも 0 でない代数的数である点）における値の代数的独立性を示す方法である。この方法が適用できる条件は以下のようなものである。変数 $z_1,.., z_n$ をそれらの単項式が n 個並んだものへと変換することを考え、それを非負整数を成分とする n 次正方行列 Ω の乗法的作用とみなし $\Omega(z_1,.., z_n)$ と表す。このとき、$f_1(z_1,.., z_n)$,.., $f_r(z_1,.., z_n)$ と $f_1(\Omega(z_1,.., z_n))$,.., $f_r(\Omega(z_1,.., z_n))$ の間に $C(z_1,.., z_n)$ 係数の連立関数方程式が成り立つことが条件である。

以下、このような関数方程式を満たす解析関数を Mahler 関数と呼ぶ。「研究開始当初の背景」欄で述べたように Mahler 関数は複素数体上で完全代数的独立性および微分完全代数的独立性を有する関数についての、多数の実例を与えることが近年 明らかとなってきている。

Mahler の方法による、値の代数的独立性の証明の概略は次の通りである。$f_1(z_1,.., z_n)$,..., $f_r(z_1,.., z_n)$ の満たす関数方程式を十分な回数反復したものを用いて補助関数を構成する。それに代数点を代入した値が十分 0 に近くなるように補助関数を解析的に構成することが１番目のポイントである。一方、問題となっている関数値が代数的「従属」であると仮定すると補助関数の代数点における値が代数的整数となるように、補助関数を構成することが２番目のポイントである。その上で、３番目のポイントである補助関数の代数点における値が 0 でないことが保証されれば、そのノルムの絶対値は１以上となり矛盾が導かれる。

上記の方法の創始者 Kurt Mahler は当初から多変数関数を扱っていた。多変数 Mahler 関数の理論は 1970 年代後半以降、K. K. Kubota, J. H. Loxton－A. J. van der Poorten, D. W. Masser, Kumiko Nishioka, B. Adamczewski 等により研究が進められ大きく発展してきた。研究代表者は自身の先行研究において多変数 Mahler 関数の理論を応用し、複素数体上で完全代数的独立性および微分完全代数的独立性を有する関数についての（高次元の場合も含めた）種々の実例を構成してきた。そこで得られた知見に基づき本研究を遂行した。

４．研究成果

非アルキメデス付値体の中で特に p 進数体上で完全代数的独立性を有する関数の研究を 2015 年度と 2018 年度に実施した。2015 年度の研究成果は以下の通りである。有理数から成る同一の級数であって、通常の絶対値と、有限個の素数 p に対する p 進絶対値のいずれに関しても収束するものが存在する。そのような級数の和の中の典型的なものが、Mahler 関数の有理数における値として表せることを研究代表者は見出した。このような Mahler 関数の値となる級数の和を p 進数として研究することにより、次のような意味で、実数かつ有限個の素数 p に対する p 進数とみなしてよいと考えられる数の実例が構成できた。一般には有理数係数の同一の多項式の根であっても、通常の絶対値と p 進絶対値とでは全く異なる形の有理数から成る級数の和としてしか表せない。従って、上述のような有限個の本質的に異なる絶対値に関して収束する、有理数から成る同一の級数の和が、有理数係数のいかなる多項式の根にもならない、即ち超越数であるときは、実数であると同時に有限個の素数 p に対する p 進数でもあると考えられる。研究代表者はそのような級数の和である超越数から成る無限集合が $\boldsymbol{Q}$ 上で代数的独立であることを、Mahler 関数の値を p 進数として扱うことにより示し、この結果を日本数学会年会において発表した。

2018 年度の研究成果は以下の通りである。上記の Mahler 関数は実数体とともに有限個の素数 p に対する p 進数体においても $\boldsymbol{Q}$ 上代数的独立な値を取るが、完全代数的独立性を有することを示すのは困難であった。その点を解消するため、通常の絶対値に関しては完全代数的独立性を有することが示されている、研究代表者の先行研究において構成した２変数関数を基に目的達成を目指した。最大の問題はそのような関数の、ひとつの変数に関する収束域を絶対値が１より大きい領域にまでは広げることができないことであった。このことは通常の絶対値と p 進絶対値に関して同時には収束しないことを意味する。従って 2018 年度の研究では、研究代表者の先行研究で構成した関数にある種のバランス化を施し、２個の完備代数閉体の直積に属するほぼすべての点で収束する Mahler 関数を構成した。この関数は異なる有限個の点において同一の値をとることから、上記の完全代数的独立性は持たない。しかし、原点に関する対称変換、および単位円周に関する折り返し、という２つの変換により生成される群がこの関数の定義域に作用し、同一の値を与える点はすべてこの群作用による同一の軌道に属することが分かった。即ち、新たに構成した Mahler 関数から、上記の群作用に関する軌道全体の集合上の写像が自然に定義される。そして、この写像は代数点に代表される任意の相異なる軌道における値がすべて代数的独立となる。つまり、群作用に関する軌道全体の集合上で定義された、完全代数的独立性を有する写像の構成という形で、2018 年度には完全代数的独立性の拡張概念に対する実例を得ることができた。p 進数体において完全代数的独立性を有する関数を構成する基盤を築いたことを意味するこの結果は数理解析研究所講究録に掲載され、別の国際研究集会でも発表した。

正標数の関数体上で、微分完全代数的独立性を有する関数を構成する研究を 2016 年度から 2017 年度にかけて実施した。上述のように正標数の体の上で定義された Mahler 関数の値の代数的独立性について、先行研究の対象は１変数の Mahler 関数に限られていた。本研究では、先行研究と異なり、多変数 Mahler 関数を正標数の関数体の上で定義し、その値の代数的独立性に関する理論を展開した。

一般に、関数の値の代数的独立性の証明は上記「研究の方法」欄で述べたように２段階から成る。即ち、問題に即して構成された Mahler 関数について、その値の独立性判定定理の証明と Mahler 関数自身の独立性判定定理の証明、という２ステップが必要である。本研究では、これら両方のステップについて正標数の関数体上で成立する定理を証明した。

さらに、上記の２つの定理を組み合せて、正標数の関数体において微分完全代数的独立性をもつ関数の実例を与えた。複素数体上では、微分完全代数的独立性をもつ関数の種々の実例が先行研究において与えられている。これと同等のものを標数 $p>0$ の関数体において構成しようとする場合、通常の微分では $p-1$ 階の導関数までしか考えられない。そこで本研究では、通常の微分のかわりに Hasse-Teichmueller 微分を考えることにより、正標数の関数体上で「微分完全代数的独立性」を有する″整関数″の実例を得た。そのような実例は、冪級数であって指数の数列が

線形回帰数列を成している”飛び”のある級数で表されるという点で、複素整関数であって微分完全代数的独立性をもつ先行研究の実例と酷似している。

正標数の関数体においても微分完全代数的独立性を有する関数の実例が得られたことは次のような重要な意味を持つ。正標数の関数体の代数閉包の完備化は複素数体の正標数類似であり、先行研究においても重要な研究対象であった。本研究成果により、この完備代数閉体は正標数の関数体上で無限の超越次数をもつのみならず、複素数体と同様の複雑さを有することが傍証された。上記の結果をすべてまとめた論文が査読付きの数論専門誌に掲載された。また、その内容を国際研究集会でも発表した。

2018 年 3 月に本補助金を用いて国際研究集会「Diophantine Analysis and Related Fields 2018」を主宰し、多くの参加者を得て２国間のみならず多国間の国際共同研究の発展に寄与した。この国際研究集会にフランスから招聘した F. Pellarin 氏との研究討議を契機として以下の研究が進展した。

複素数体において完全代数的独立性をもつことが既知である関数であって、数論の他分野との多くの繋がりがある Hecke-Mahler 級数が、完全代数的独立性のみならず微分完全代数的独立性をも有することの解明は研究遂行のために重要であった。Hecke-Mahler 級数とは、実数 ω の正整数 n 倍の整数部分 $[n\omega]$ から成る数列 $\{[n\omega]\}$ の母関数である。研究代表者は研究室所属の博士課程学生との共同研究において、ω がある適切な条件を満たす２次無理数のとき、Hecke-Mahler 級数が微分完全代数的独立性を有することを証明した。上記の適切な条件を満たす２次無理数 ω として代数的整数である場合が含まれ、この方面の先行研究の主要な部分を含む形で完全代数的独立性から微分完全代数的独立性へと発展させることができた。この結果は 2018 年に査読付きの数論専門誌に掲載された。

2019 年度の研究実績は、微分完全代数的独立性を有する関数を応用し超越性・代数的独立性を行列環上に拡張する新たな概念を得たことである。具体的には、微分完全代数的独立性を有する関数を表す冪級数に、代数的数を成分とする正則行列を代入して得られる行列値関数の数論的性質を研究した。その結果、そのような行列値関数は代数的数を成分とする行列環上において両側超越性というべき、超越性の一種の疑似概念を満たす実例であることが分かった。

さらに、微分完全代数的独立性を有する 複数の関数を表す冪級数たちに、代数的数を成分とする正則行列を代入して得られる行列値関数たちを同時に考えると、代数的数を成分とする行列環上において両側代数的独立性ともいえる、代数的独立性の（制限付きの）疑似概念を満たす実例となることも分かった。現在、これらの結果をまとめた論文を執筆中であり、査読付き学術誌に投稿予定である。上記の両側超越性および両側代数的独立性の実例においては、代入する代数的数成分の行列には、正則性と（行列値冪級数が収束するために必要な）スペクトル半径が冪級数の収束半径より小さいという、２つの自然な条件のみを課している点が特徴的である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Tanaka Taka-aki	４．巻 2131
２．論文標題 Algebraic independence of the values of a certain map defined on the set of orbits of the action of Klein four-group	５．発行年 2019年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 177～187
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tanaka Taka-aki、Tanuma Yusuke	４．巻 14
２．論文標題 Algebraic independence of the values of the Hecke-Mahler series and its derivatives at algebraic numbers	５．発行年 2018年
３．雑誌名 International Journal of Number Theory	６．最初と最後の頁 2369～2384
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1142/S1793042118501440	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Goto Akinari、Tanaka Taka-aki	４．巻 184
２．論文標題 Algebraic independence of the values of functions satisfying Mahler type functional equations under the transformation represented by a power relatively prime to the characteristic of the base field	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Number Theory	６．最初と最後の頁 384～410
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.08.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Tanaka Taka-aki
２．発表標題 Algebraic independence of the values of a certain map defined on the set of orbits of the action of Klein four-group
３．学会等名 解析的整数論とその周辺
４．発表年 2018年

１．発表者名 Tanaka Taka-aki
２．発表標題 Algebraic independence properties of a certain map defined on the set of orbits of the action of Klein four-group
３．学会等名 Keio-Yonsei Number Theory Workshop（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Tanaka Taka-aki
２．発表標題 On the functions having `perfect' algebraic independence property at algebraic numbers
３．学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2017（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 田中 孝明，中島 ミホ
２．発表標題 有限個の素数pに対するQpとRの`共通部分'に属する超越数から成る代数的独立な無限集合について
３．学会等名 日本数学会年会
４．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Diophantine Analysis and Related Fields 2018 http://www.math.keio.ac.jp/~takaaki/DARF2018/DARF2018prog_j.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考