4版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６２１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４７９５
研究課題名（和文）跡公式の明示的フーリエ変換とその数論への応用

研究課題名（英文）Explicit Fourier transform of trace formulas and its applications to arithmetic

研究代表者
都築　正男（Tsuzuki, Masao）

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：８０２９６９４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：有理数体上の３次一般線形群上のカスプ的保型形式であって有限素点においていたるところ不分岐なものに対し、アーサー不変跡公式に表れる不変超函数のフーリエ変換を完全に計算し、実素点のデータで跡公式を明示的に書き下した。応用として、行列式１の正定値対称行列全体からなる５次元リーマン対称空間の３次ユニモヂュラー群による商空間のラプラシアンに対するワイル法則の誤差項評価を、既知の結果から対数オーダー改善することが出来た。更に、２次一般線形群に対しては、正則ヒルベルト形式の空間に対するJacquet Zagier型跡公式の局所項をすべて計算し、高次の保型Ｌ関数の中心値の非消滅性について新たな結果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数群上の保型形式（保型表現）の理解には、その空間に作用する様々な線形作用素のトレースの情報を得ることが重要である。そのための有効で強力な手段として、アーサー・セルバーグ跡公式が知られていた。それは、代数群のアデール化の既約表現や有理共役類に対して定義される不変超函数の無限線形和で記述される複雑な公式である。我々は、３次一般線形群を研究対象として、これらの不変超函数を有限素点で至る所不分岐な状況で考え、実素点でのヘッケ関数に対して計算可能な形で比較的簡明に書き下すことに成功した。応用としてワイル法則の誤差改善を証明した。更に、この研究は３次整環の数え上げ関数の誤差項の存在にも応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：We completely calculated the Fourier transforms of the invariant distributions which appear in the Arthur's invariant trace formula for the space of cusp forms on the general linear group of degree 3 which are everywhere unramified at non-archimedean places. Our formula is written solenly in terms of the archimedean data. As an application of our formula, we obtained a new error term estimate in the Weyl's law for the Laplace-Bertrami operator of a 5 dimensional arithmmetic manifold arising as a discrete quotient of the symmetric space of the special linear group of degree 3. Our estimate improves the known result by logarithmic order. For the holomorphic cusp forms on the general linear group of degree 2, we calculated all the local terms of the Jacquet-Zagier type trace formulas in terms of the Fourier transform of the spherical Hecke functions. We applied this formula to prove the infinitum of cupsidal automorphic forms with non-zero central values of L-functions.

研究分野：整数論（保型形式）

キーワード：跡公式　フーリエ変換　Ｌ関数

１．研究開始当初の背景

G を有理数体上で定義された簡約可能代数群とする。G のアデール化で定義されたコンパクト台を持つ滑らかな関数（いわゆるヘッケ関数）の右移動によって得られる核型線型作用素（ヘッケ作用素）の保型カスプ形式の空間におけるトレース（跡）を表示する公式としてアーサー・セルバーグ 跡公式が知られている。この公式は、一方では保型表現の（重さ付）超函数指標の線型無限和（スペクトルサイド）、他方では G の有理点の共役類から決まる（重さ付）軌道積分の無限線型和（幾何サイド）という２通りの表示式を結ぶ等式という形で記述される。G の有理点の群がそのアデール化においてコンパクトな基本領域を持つ場合では、超函数指標や軌道積分は Harish-Chandra による基本的な研究や、R. Herb の一般的な公式によってその性質はよく理解されていた。定義からこれらの超函数は群の共役作用によって不変となる。基本領域が非コンパクトになる状況では、跡公式を記述するためにこれらの不変超函数に加えて、アーサーによって導入され研究された重さ付き超函数指標や重さ付軌道積分が必要となる。定義に必要な「重さ関数」は極大コンパクト部分群の選択に依存するため、これらの重さ付対象物は群不変性を有しない。アーサーは、これらの対象物を修正し不変超函数を構成するための組み合わせ帰納的な定義を提案し、跡公式自体を不変超函数の線型和で表した。これが１９８０年代前半に得られた不変アーサー跡公式である。アーサー跡公式やその不変化に現れる無限和の収束は、長らく非常に弱い形でしか確立されておらず、個別のテスト関数に対してトレースを具体的に計算したり大きさを評価したりするためには大きな障害となっていた。２０１０年代に行われた Lapid-Finis の仕事によって、アーサー跡公式の両辺の絶対収束性が一般に証明され、個別の群の保型スペクトラムに対するトレースの計算や漸近評価に大きな進展がもたらされた。
さて Langlands 予想によれば、一般の簡約代数群の保型表現は、一般線型群 GL(n)の等圧的保型表現に関連づけられると期待される。こうして GL(n)の保型表現は数論において非常に特別で基本的な重要性を持つことになる。しかし、GL(2)の正則保型形式を例外として、GL(n)の保型表現の存在やその数え上げを、GL(n)の跡公式を直接利用して行うことは非常に困難である。それは、一般の GL(n)の対称空間には不変エルミート構造が存在せず、正則保型形式のようにあるクラスの保型形式を選択的に分離する技術的方法（理論的根拠）がないことに由来する。７０年代に行われた Gelbart-Jacquet の仕事では、双対群の２次対称テンソル表現による GL(2)のカスプ表現の持ち上げによって GL(3)の等圧的保型表現が構成された。この構成法を２次ユニモヂュラー群上のマース波動形式に適用することで GL(3)のラプラシアンのカスプ固有形式で至るところ不分岐なものが無数に得られるが、これらはすべて自己双対的な保型表現に対応する。当該分野では「GL(3)の至るところ不分岐なカスプ形式であって、自己双対的でない表現を生成するものが存在するか」が自然な問題として提起されていた。A. Booker の学生であった C. Bian は、学位論文で計算機を利用した実験的な研究を行い、件の条件を満たすカスプ形式の存在を強く示唆する結果を得ていた。この結果を理論的に補強し証明に至るために、GL(3)の不変跡公式を、至るところ不分岐な保型スペクトラムに限定し、そこに現れる不変超函数をテスト関数のフーリエ像によって明示的に書き下した公式が一部専門家から望まれていた。これが当該研究のアーサー跡公式に関する部分に関する研究開始当初の背景である。
アーサー跡公式の構成の一般化として、H.Jacquet の提唱した相対跡公式は、GL(2)に関連した保型表現の lifting の(持ち上げ)の別構成を契機として導入されその有用性が再認識された。この手法の利点は、持ち上げの出発点となる保型表現とその像となる表現それぞれに属する保型形式の周期積分の間の関係式を同時に証明できることが挙げられる。当該研究開始当初から現在に至るまで、相対跡公式の研究の歴史はまだ浅く個別的な手法に頼らざるを得ない状況におおきな変化はないと思われる。大域的 Gross Prasad 予想の市野・池田による精密化の証明は、保型表現論における重要な未解決問題である。そのユニタリー類似の大きな部分が、W. Zhan によって相対跡公式の比較によって証明されたことは研究開始当初、当該研究分野にもたらされた大きな進展であった。

２．研究の目的

（１）GL(3)の跡公式に関して：
マース波動形式はポワンカレ上半平面上のユニモジュラー群の作用で不変なラプラシアンの実解析的固有関数でカスプ周辺で適切な増大度条件を満たすものとして定義され、正則楕円モジュラー形式と並んで古典的な保型形式のなかで最も基本的なクラスをなしている。そのスペクトル理論は Kloosterman 和の理論と深く関連して、解析的整数論における主要な研究手段となっている。その要となるのが、セルバーグ跡公式や相対跡公式の原型である Kuznetsov 跡公式であり、膨大な先行研究がある。我々の目的はこれらの跡公式達を、GL(2)を離れて、より高ランクの代数群に対して研究し解析的整数論の研究の道具となるのに十分な具体性と可塑性を

持った形で供することであった。
最初の興味深い実例は GL(3)である。この群に対しては、Kuznetsov 跡公式が V. Blomer 等によって研究され古典的な場合と同程度にまで計算されていた。しかし、Selberg 跡公式に関しては、上で述べたような視点で行われた先行研究は見られるものの、そこに大きな瑕疵があったり研究自体が未完に終わっていたりという状態であった。1.で述べた研究背景に関連して、当該研究では研究対象をひとまず GL(3)に絞ることとした。

(2) 相対跡公式に関して：
直交群とその部分群に対する(一般化された)Gross Prasad 周期積分を捕捉するような相対跡公式の幾何サイドの研究に、杉山氏と共同で行っていたトーラス周期のケースの手法の一般化を試みるのが当該研究のもう一つ目的であった。

３．研究の方法
(1) GL(3)に関しては、(不変)跡公式に関する Arthur の一連の仕事と、Hoffmann-Wakatsuki によるランク２代数群の場合の Arthur 跡公式幾何サイドに現れる冪単項の明示式を出発点とした。
これらの先行研究を活用すると、幾何サイドに現れるいわゆる大域定数はすべて適当な基本領域の体積とリーマンゼータ関数の１でのローラン展開係数で記述されてしまう。研究の背景で説明したような経緯もあって、我々は、すべての有限素点で不分岐な保型形式に考察を限定した。(実際、この限定的設定であっても問題の本質は失われず、しかもこのケースが一番基本的である。）すると、問題はアルキメデス素点での重さ付軌道積分の計算に還元される。通常の軌道積分に関しては、Harish-Chandra と R. Herb の一般論からフーリエ変換は決定される。従って、不変化された重さ付軌道積分のフーリエ変換を如何に明示的に計算するかが我々の問題の核となる。
正則半単純元に付随する重さ付軌道積分に対しては、W.Hoffmann による一連の研究がある。正則半単純元は適当なトーラスにあると限定してよい。Arthur は重さ付軌道積分をそのトーラス上の関数と見た場合に満たすべき微分方程式系を導出していた。Hoffmann はこの微分方程式系の詳細な解析を実行し、それがホロノミー系であることを示し、解の基本系をべき級数を用いて具体的に構成した。さらに、ワイル壁に沿った接続関係式や無限遠での漸近挙動を組み合わせて、少なくとも GL(3)の場合には、正則半単純元に付随する重さ付軌道積分の明示形を決定していた。我々は、この結果を出発点として、Arthur の極限公式を用いて、跡公式幾何サイドに現れるすべての非正則な元に対しても重さ付軌道積分のフーリエ変換を計算することを目指した。

(2) 相対跡公式に関しては、まずもっとも基本的なケースとして、有理数体の２次不分岐代数上で考えた GL(2)の保型形式を GL(2)に同型な自然な部分群上の保型形式に沿って積分して定義される Gross-Prasad 周期を捕捉するような相対跡公式の研究を出発点とした。このケースでは、杉山・都築のトーラス周期に対する相対跡公式の手法を活用した。

４．研究成果

(1) GL(3)の跡公式についての成果：これは若槻聡氏(金沢大学)、Werner Hoffmann 氏(Bielefeld 大学)との共同研究の成果である。
実数体上で GL(3)の非正則元に付随する重さ付軌道積分であって、上述した設定（すべての有限素点で GL(3)の極大コンパクト部分群の特性関数をテスト関数の有限成分とする）に特殊化したアーサーの不変跡公式に現れるものについて、そのフーリエ変換を digamma 関数やその多変数への一般化を使って明示的に記述することができた。少なくとも無限素点でも不分岐という条件を課した場合では、重さ付軌道積分の明示的フーリエ変換を使うことで、跡公式が適用可能なテスト関数の範囲を Paley-Wiener 関数からさらに広い関数に拡張することができた。
更に、3 次特殊線型群の対称空間のユニモジュラー群による離散商として得られる５次元リーマン多様体（より正確には V-manifold であるが、これを M とする）のスペクトル幾何の問題に対して成果があった。まず、M のラプラシアン離散固有値のうち与えられた正数 X 以下のものの数を N(X)とする。パラメーターX を無限に大きくした際の、この数え上げ関数 N(X)の漸近挙動主要項を記述するワイル法則は D. Miller によって証明されていた。その誤差項評価は、Arthur-Selberg 跡公式の絶対収束性と重さ付軌道積分の鞍点法評価を利用して、Lapid-Mueller によって得られていた。我々は、重さ付軌道積分の明示的フーリエ変換を使って、Lapid-Mueller の誤差項評価を対数オーダー改善することができた。この改善された誤差項は、３次特殊線型群の対称空間のコンパクト離散商の場合の誤差項と一致し、ベストな改善であろうと思われる。さらに、幾何サイドの各項を個別評価することで、ワイル法則誤差項の精細な構造を見ることに興味深い可能性も広がった。また、N(X)のラプラス変換、即ち M の熱核(heat kernel)の微小時間における漸近展開の存在を証明することができた。漸近展開主要項は、ワイル法則の主要項と簡単な関係を持つが、今回、漸近展開の第２項を係数まで含めて明

示的に決定することができたことも明示的な跡公式の応用の１つとして挙げられる。

(2) Jacquet-Zagier 型跡公式についての成果：
これは杉山真吾氏(日本大学)との共同研究の成果である。1970 年代に D.Zagier はユニモジュラー群上の正則楕円形式の空間に作用するヘッケ作用素の核関数の対角制限を非正則アイゼンシュタイン級数と掛け合わせて基本領域上で積分することによって、Eichler-Selberg 跡公式の興味深い一般化を証明した。その後、Jacquet-Zagier はこの跡公式の構成法を一般代数体上で GL(2)のアデール化に対して一般化し、２次対称積Ｌ関数の正則性の別証明に応用した。この Jacquet-Zagier の公式は、相対跡公式の一種とみることが可能である。
我々は、狭義類数が１とは限らない総実代数体上の代数群 GL(2)のアデール化を使った設定で、ヘッケ合同 level について Jacquet-Zagier の公式の幾何サイドを完全に明示的に計算した。同時に、幾何サイド各項の増大レベルに関する上からの評価式を証明することで、ヘッケ固有値の一様分布性に関するセールの定理の２次対称積Ｌ関数の臨界値による重み付変形版を証明することができた。さらに、Jacquet-Zagier 公式の構成において、アイゼンシュタイン級数を一般のヘッケ・マース波動形式に置き換えた場合でも、我々の提案した証明方法は有効であり、全く新しい跡公式の変種(Jacquet-Zagier 公式のカスピダル類似)を得ることができた。このカスピダル類似のスペクトルサイドは、２乗ノルムの意味で正規化された正則楕円保型形式とその複素共役、および構成に使ったヘッケ・マース波動形式の３重積周期積分のスペクトル平均となる。幾何サイドは、有理数体の２次拡大の狭義 ideal 類に付随するヘッケ・マース形式の周期積分(Waldspurger 周期)を含む無限和で記述される。この公式と、Luo-Sarnak の quantum variance についての先行研究の結果を組み合わせることによって、GL(2)×GL(3)のある不分岐カスプ保型表現の族に関して、その標準Ｌ関数の中心値が零とならないものの個数の下からの評価を得ることができた。

５．主な発表論文等
〔雑誌論文〕（計　6　件）

1. A. Deitmar, Y. Gon and P. Spilioti:
A prime Geodesic Theorem for $¥mathrm{SL}_3({¥bf Z})$, to appear in Forum Math. (2019 or 2020). 査読有 doi:未定

2. S. Sugiyama, M. Tsuzuki,
An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms, J. Funct. Anal. 275 (2018) No.18, 2978—3064. 査読有

3. W. Hoffmann, S. Wakatsuki, On the geometric side of the Arthur trace formula for the symplectic group of rank 2, Mem. Amer. Math. Soc. 255 (2018), no. 1224. 10.1090/memo/1224 査読有

4. S. Wakatsuki, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree, Adv. Math. 340 (2018), 1012--1066. 10.1016/j.aim.2018.10.028 査読有

5. Y. Gon, Dirichlet series constructed from periods of automorphic forms, Math. Zeit. 281 (2015), 747--773. 査読有 doi:10.1007/s00209-015-1506-8

6. Y. Gon, Differences of the Selberg trace formula and Selberg type zeta functions for Hilbert modular surfaces, J. Number Theory 147 (2015), 396--453. 査読有 doi:10.1016/j.jnt.2014.07.019

〔学会発表〕（計　１１　件）

1．都築正男、Abundance of cusp forms on higher dimensional arithmetic quotients with non-vanishing L-values, (Value distributions of zeta and L-functions and related topics 2019 年)

2．都築正男、An explicit trace formula of SL_3(Z) and its application (RIMS conference 保型形式、保型表現とその周辺 2019 年)

3．都築正男、An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type and its applications (RIMS conference, Analytic Number Theory and Related Topics 2018 年)

4．権　寧魯，セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在，
第６３回代数学シンポジウム，東京工業大学，2018 年 9 月 4 日

5．権　寧魯，A prime geodesic theorem for $\mathrm{SL}(3,{\bf Z})$,
5th Kyoto conference on automorphic forms，京都大学，2018 年 6 月 30 日

6．若槻 聡，A trace formula on $\SL(3,\Z)\backslash \SL(3,\R)/\SO(3)$,
Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics，大阪市立大学　理学部 E 棟 E408，2017 年 9 月 20 日．

7．都築正男， A cuspidal analogue of Jacquet-Zagier's trace formula,
Zeta functions and trace formulas in Fukuoka, Lecture Room M W1-C-513 , West Zone 1, Ito campus, Kyushu University，2017 年．

8．若槻 聡，A trace formula on $\SL(3,\Z)\backslash \SL(3,\R)/\SO(3)$, Zeta functions and trace formulas in Fukuoka, Lecture Room M W1-C-513 , West Zone 1, Ito campus, Kyushu University，2017 年 10 月 13 日．

9．若槻 聡，A trace formula on $\SL(3,\Z)\backslash \SL(3,\R)/\SO(3)$，京都大学 数学教室 談話会，3 号館 110 講演室，2017 年 11 月 29 日．

10．若槻 聡，The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree,
TSUDA COLLEGE AND OIST JOINT WORKSHOP ON CALABI-YAU VARIETIES:ARITHMETIC, GEOMETRY AND PHYSICS, AUGUST 1--3 2016,
Organized by Noriko Yui (Queen’s University) and Takayuki Oda (OIST),
August 3 at Tokyo University
Komaba Campus Room 117, 11:15am--12:15am August 3.

11．若槻 聡，ジーゲル保型形式の次元公式，筑波大学，日本数学会，企画特別講演，2016 年 3 月 19 日．

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：若槻聡

ローマ字氏名：WAKATSUKI, satoshi

所属研究機関名：金沢大学

部局名：数理物質科学研究科（系）

職名：教授
研究者番号（8 桁）：10432121

研究分担者氏名：権寧魯

ローマ字氏名：GON, yasuro

所属研究機関名：九州大学

部局名：数理（科）学研究（科）院

職名：准教授
研究者番号（8 桁）：30302508

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。